УДК 519.816

Надія ТИМОФІЄВА
м. Київ
Tymnad@gmail.com

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ СИМЕТРІЇ В ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ОДНОГАБАРИТНИХ ОБ'ЄКТІВ

На прикладі задачі розміщення одногабаритних об'єктів у фіксовані позиції аналізується властивість симетрії, яка має місце в комбінаторній оптимізації. З цією метою уводяться системи комбінаторних функцій, якими задаються вхідні дані. Одна з цих систем описує базову задачу (задану за умовою). Інша – упорядковану задачу, яка утворюється з базової та є найпростішим розв'язним випадком, для якого нескладно визначати глобальні мінімум та максимум. Для цих систем виділено симетричні перестановки та комбінаторні функції, які описуються законами евклідової геометрії. Доведено, що значення цільової функції при знаходженні мінімуму утворює послідовність, для якої послідовність розв'язків, що утворюються при знаходженні максимуму, є симетричною.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, цільова функція, перестановка, комбінаторна функція, симетрія комбінаторних множин, розміщення одногабаритних об'єктів.

У статті розглядається властивість симетрії, яка має місце в комбінаторній оптимізації. Доведено, що для задачі розміщення одногабаритних об'єктів у фіксовані позиції значення цільової функції при знаходженні мінімуму утворює послідовність, для якої послідовність розв'язків, що утворюються при знаходженні максимуму, змінюються симетрично.

У задачі розміщення одногабаритних об'єктів можна спостерігати явище, коли для послідовності значень цільової функції, які змінюються від максимуму до мінімуму, існує симетрична послідовність розв'язків, значення яких змінюються від мінімуму до максимуму. Така властивість пов'язана з тим, що множині комбінаторних конфігурацій, які є аргументом цільової функції, характерна симетрія.

Задача розміщення об'єктів виникає в різних галузях: в конструкторському проектуванні обчислювальної апаратури, оптимальному розкрої, моделюванні деяких хімічних та фізичних процесів тощо [1; 2; 3; 4; 5]. Задачі цього класу розділяються за габаритами об'єктів, за способом задання координат на поверхні для їхнього розміщення, а також за структурою вхідних даних. Кожна із таких задач вимагає спеціальних підходів для свого розв'язання. У [5; 6] розміщення різногабаритних модулів зводиться до одногабаритних. Для цього на k-й ітерації проводиться компоновка елементів в одногабаритні модулі з наступним їхнім розміщенням ітераційним алгоритмом в динамічно перебудовані позиції на поверхні плати до тих пір, поки не буде розміщено найменший за габаритами модуль. З цієї схеми видно, що найпростішою задачею з розміщення об'єктів є розміщення одногабаритних модулів у фіксованих позиціях. На цій задачі нескладно досліджувати властивість симетрії, яка має місце в комбінаторній оптимізації.

У літературі розглядаються симетрії розбиття n-елементної множини на підмножини [7]. Ця комбінаторна конфігурація є аргументом цільової функції в різноманітних задачах розбиття, зокрема в задачах класифікації та кластеризації. Для них вводяться класи еквівалентності, однією з умов яких виступає симетрія. У [8] ґрунтовно досліджують групи симетрії на перестановках та визначають їхній порядок. В комбінаторній оптимізації ця властивість проявляється завдяки симетрії комбінаторних множин, які є аргументом цільової функції [9; 10]. Закономірність зміни значень цільової функції в залежності від симетрії комбінаторних множин в літературі не розглядається.

Метою дослідження є виявлення закономірності зміни значень цільової функції в залежності від симетрії множини перестановок в задачі розміщення одногабаритних об'єктів у фіксовані позиції. Описаний підхід такого аналізу можна використовувати для задач комбінаторної оптимізації різних класів.

Математична постановка задачі розміщення об'єктів в рамках теорії комбінаторної оптимізації. Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації [11]. Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад A та B, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини *базовими*. Кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{ls} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $l \in \{1,...,n\}$, $s \in \{1,..., \tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B. Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини c_{ls} назвемо *вхідними* даними та задамо їх матрицями. Ці величини визначають значення цільової функції.

Із елементів однієї або кількох із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого $F(w)$ набуває оптимального значення при виконанні заданих обмежень.

Змоделюємо вхідні дані в задачі комбінаторної оптимізації скінченними послідовностями. Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k),..., \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1),..., \varphi(m))$, де $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C та $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Верхній індекс k ($k \in \{1,...,q\}$) – порядковий номер w^k в W, q – їхня кількість. Якщо матриці $Q(w^i)$ та C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\,\tilde{n}$). Функція цілі $F(w^k)$ набуває вигляду

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j (f(j), w^k)\, \varphi(j) \tag{1}$$

Уведемо системи комбінаторних функцій H та H', де $\beta(f(j), w^k)|_1^m \in H$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w^k \in W$, утворена з елементів базової множини $A_n = \{a_1,..., a_n\}$, $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w'^i \in W'$, утворена з елементів базової множини $\tilde{A}_m = \{\tilde{a}_1,..., \tilde{a}_m\}$. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w'^1)|_1^m$, де w^1, w'^1 – перші перестановки в W, W' і $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w'^1)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$. Задачу комбінаторної оптимізації, вхідні дані в якій задано функціями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо базовою (або задачею системи H). Задачу, вхідні дані в якій задано функціями $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)|_1^m$ (або $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$), де $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i) \geq \overleftarrow{\beta}(f(j+1), w'^i)$ (або $\vec{\beta}(f(j), w'^t) \leq \vec{\beta}(f(j+1), w'^t)$), та $\vec{\varphi}(j)|_1^m$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j)|_1^m$), де $\vec{\varphi}(j) \leq \vec{\varphi}(j+1)$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j) \geq \overleftarrow{\varphi}(j+1)$), утворених із $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо впорядкованою (або задачею системи H').

Задача розміщення одногабаритних об'єктів формулюється таким чином. Множину одногабаритних об'єктів необхідно розмістити в задані установочні позиції так, щоб змодельована за заданими критеріями цільова функція набувала оптимального значення, а віддаль між об'єктами дорівнювала певній величині. Аргументом цільової функції в ній є перестановка. Для спрощення її розв'язання об'єкти подамо геометричними точками, а оцінку результату проводимо за виразом (1). Ця задача задається двома множинами A та B. Елементам $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, відповідають об'єкти, які необхідно розмістити в заданій області. Елементам $b_t \in B$, $t \in \{1,..., \tilde{n}\}$, відповідають установочні позиції для розміщення об'єктів, де n – кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B, $n \leq \tilde{n}$. Нижче розглянемо варіант задачі для $n = \tilde{n}$.

Оскільки в задачі розміщення одногабаритних об'єктів аргументом цільової функції є перестановка, розглянемо цю комбінаторну конфігурацію [8; 11]. Нехай задано скінченну базову множину $A = \{a_1, ..., a_n\}$, яка складається з n елементів будь-якої природи. Перенумеруємо їх від 1 до n і вважатимемо, що елементами A виступають саме ці числа. Назвемо перестановкою $w = (w_1, ..., w_n)$ будь-яке розміщення чисел $1, 2, ..., n$ у деякому порядку. Їхню множину позначимо W. Число різних перестановок з n символів дорівнює добутку $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, який позначається $n!$. Якщо в заданій перестановці поміняти місцями будь-які елементи (не обов'язково розміщені поряд), а всі інші залишимо на місці, то одержимо нову перестановку. Операцію, яка змінює порядок елементів у перестановці, називають підстановкою. Підстановка розкладається на цикли. Цикли довжиною два називають транспозиціями, тобто транспозиції – це найпростіші підстановки та означають переміщення. В подальшому користуємося цим терміном. Назвемо його рекурентним комбінаторним оператором транспозиції та позначимо його як $\alpha(w_s, w_l)$. Від будь-якої перестановки з n елементів можна перейти до будь-якої іншої з тих же символів за допомогою як однієї так і кількох транспозицій.

Розглянемо симетрію, що характерна для множини перестановок. Із усіх видів симетрії ураховуємо ту, яка описується законами евклідової геометрії. Симетричний будь-який предмет, який збігається сам із собою при русі без деформацій, тобто, симетрія зберігає відстань між точками предмета незмінними. Існує єдиний спосіб перемістити симетричну послідовність так, щоб вона збіглася з початковою. Це – її поворот на 180^0. Уведемо означення.

Означення 1. Інверсією перестановки $w^k = (1, 2, ..., n-1, n)$ назвемо перестановку $\tilde{w}^k = (n, n-1, ..., 2, 1)$, тобто $w^k \in W$ та $\tilde{w}^k \in W$ симетричні одна відносно другої.

Отже, для будь-якої перестановки у множині W існує їй симетрична перестановка. Попарно симетричних перестановок у W міститься $\frac{n!}{2}$.

У природі існує скінченне число комбінаторних множин, кожна з яких упорядкована по-своєму. Згенеруємо множину перестановок W рекурентно-періодичним методом з урахуванням властивості періодичності як описано в [11]. Для цього необхідно сформулювати три правила, за якими утворюються:

а) інтервал нульового рангу,

б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу),

в) інтервал σ-го рангу.

Проаналізувавши побудовану за цією схемою множину W, можна побачити, що обмежувальні перестановки p-го інтервалу n-го рангу для n парного утворюються точно так, як і r-го інтервалу n-го рангу, тобто по відношенню до середнього інтервалу $n/2$ у множині W має місце осьова симетрія; $p \in \{n/2+1, ..., n\}$, $r \in \{1, ..., n/2\}$.

Розглянемо, яким чином симетрія множини перестановок впливає на зміну значень цільової функції в задачі розміщення одногабаритних об'єктів. Комбінаторні функції, аргументом яких є перестановка, також утворюються рекурентним комбінаторним оператором транспозиції. Для будь-якої комбінаторної функції із системи H' знайдеться їй інверсна, тобто симетрична. Можна довести, що жодна комбінаторна функція із системи H не має своєї інверсії (симетричної) в H [12]. Оскільки $\beta(f(j), w^{'k+1})|_1^m \in \mathrm{H}'$ попарно симетричні, нижче для них розглянемо закономірність зміни значень цільової функції від симетрії.

Дві транспозиції $\alpha(w_l^k, w_t^k)$ та $\alpha(w_r^k, w_s^k)$ назвемо незалежними, якщо всі елементи в них мають різні значення. Відповідно, дві траспозиції функції $\beta(f(j), w^{'k})|_1^m$ – незалежні, якщо значення цієї функції в них – різні.

Означення 2. Дефіцитом функції $\beta(f(j), w^{'k+1})|_1^m$ відносно транспозиції назвемо величину $\varepsilon(w^{'k}) = \left| \beta_t(f(t), w^{'k}) - \beta_s(f(s), w^{'k}) \right|$, які операцією транспозиції $\alpha(w_r^{'k}, w_l^{'k})$ помінялися місцями в $\beta(f(j), w^{'k+1})|_1^m$.

Дефіцитом функції $\varphi(j)|_1^m$ відносно транспозиції назвемо величину $\varepsilon' = \left|\varphi(t) - \varphi(s)\right|$, $\varphi(t), \varphi(s)$ якої перемножуються на значення $\beta_j(f(t), w^{'k})$, $\beta_s(f(s), w^{'k})$ функції $\beta(f(j), w^{'k})|_1^m$.

Для упорядкованої задачі розглянемо, як змінюється в залежності від транспозиції значень $\beta_j(f(j), w^{'k})$ цільова функція (1), якщо $\beta(f(j), w^{'1})|_1^m = (1,..., m)$ та $\varphi(j)|_1^m = (1,..., m)$.

Теорема. Якщо у функції $\beta(f(j), w^{'1})|_1^m = (1,..., m)$ провести транспозицію двох значень $\beta_j(f(j), w^{'1})$, $\beta_s(f(s), w^{'1})$, то $F(w^{'k})$ для одержаної перестановки $w^{'k} \in W'$ дорівнює

$$F(w^{'k}) = F(w^{'1}) - (\varepsilon(w^{'1}))^2. \qquad (2)$$

Доведення. Спочатку наведемо таку лему.

Лема. Якщо функція $\beta(f(j), w^{'k})|_1^m$ утворена операцією транспозиції $\alpha(w_r^{'k}, w_l^{'k})$ із функції $\beta(f(j), w^{'1})|_1^m = (1,..., m)$ або із $\beta(f(j), \tilde{w}^{'k})|_1^m = (m,..., 1)$, то дефіцит транспозиції цих функцій дорівнює одному і тому ж числу $\varepsilon(w^{'1}) = \varepsilon'$, (або $\varepsilon(\tilde{w}^{'k}) = \varepsilon'$).

Доведення очевидне.

Запишемо $F(w^{'1}) = 1 + ... + d^2 + ... + e^2 + ... + m^2$, а $F(w^{'k}) = 1 + ... + d\,e + ... + ed + ... + m^2$. Із цих виразів видно, що в $F(w^{'k})$ по відношенню до $F(w^{'1})$ змінилися два значення, для яких справедлива нерівність

$$d^2 + e^2 > de + ed. \qquad (3)$$

Згідно з лемою 1, $\varepsilon(w^{'1}) = \varepsilon' = \left|e - d\right|$, $e > d$. Запишемо $e = d + \varepsilon(w^{'1})$, $d = e - \varepsilon(w^{'1})$. Підставимо у праву частину виразу (3) значення d та e: $d(d + \varepsilon(w^{'1})) + e(e - \varepsilon(w^{'1})) = = d^2 + e^2 - \varepsilon(w^{'1})(e - d) = d^2 + e^2 - (\varepsilon(w^{'1}))^2$. В результаті нерівність (3) набуде вигляду $d^2 + e^2 > d^2 + e^2 - (\varepsilon(w^{'1}))^2$.

З цього випливає, що величина функції $F(w^{'k})$ по відношенню до значення $F(w^{'1})$ зменшується на $(\varepsilon(w^{'1}))^2$, що і доводить теорему.

Наслідок 1. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1,..., m)$ та $\varphi(j)|_1^m = (1,..., m)$, то будь-яка транспозиція $\alpha(w_r^1, w_s^1)$ переводить $n-2$ пари значень $\beta_j(f(j), w^1)$ в інверсне, а значення цільової функції $F(w^k)$ зменшується по відношенню до $F(w^1)$, тобто

$$F(w^k) = F(w^1) - \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_j(w^k)\,\varepsilon'_j, \; w^1 = (1, ..., n) \in W \; .$$

Наслідок 2. Якщо $\beta(f(j), \tilde{w}^k)|_1^m = (m,..., 1)$ та $\varphi(j)|_1^m = (1,..., m)$, то будь-яка транспозиція $\alpha(\tilde{w}_r^k, \tilde{w}_s^k)$ переводить $n-2$ пари значень $\beta_j(f(j), \tilde{w}^k)$ функції $\beta(f(j), \tilde{w}^k)|_1^m$ в прямий порядок, а значення цільової функції $F(w^i)$ по відношенню до $F(\tilde{w}^k)$ збільшується, тобто $F(w^i) = F(\tilde{w}^k) + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_j(w^k)\,\varepsilon'_j$, $\tilde{w}^k = (n, ..., 1) \in W \quad i,k \in \{1,..., n!\}$.

Наслідок 3. Якщо $\beta(f(j), w^{'1})|^m_1 = (1, ..., m)$, а $\varphi(j)|^m_1 = (1, ..., m)$, то цільова функція $F_{\max}(w^{'1}) = F_{\min}(\tilde{w}^{'k}) + \sum_{l=1}^{\varsigma} \varepsilon_l(\tilde{w}^{'k})\, \varepsilon_l^{'}$, де $\varsigma = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, а

$$\varepsilon_l(\tilde{w}^{'k}) = \begin{cases} \{1, 3, 5, ..., n-1\}, & \text{якщо} \quad m \in Z, \\ \{2, 4, 6, ..., n\}, & \text{якщо} \quad m \in Z_1, \end{cases}$$

$$Z \in \{2, 4, ..., 2j\},\ Z_1 \in \{1, 3, ..., 2j-1\}.$$

Наслідок 4. Якщо $\beta_j(f(j), w^{'1}) \in R$, $\varphi(j) \in R$, а цільова функція для $w^{'t} \in W^{'}$ набуває найбільшого значення, то найменше її значення для перестановки $w^{'k} \in W^{'}$ дорівнює $F_{\min}(w^{'k}) = F_{\max}(w^{'t}) - \sum_{l=1}^{\varsigma} \varepsilon_l(w^{'t})\, \varepsilon_l^{'}$.

Якщо $\beta_j(f(j), w^{'1}) \in R$, $\varphi(j) \in R$, а цільова функція для $w^{'k} \in W^{'}$ набуває найменшого значення, то найбільше її значення для перестановки $w^{'t} \in \Omega^{'}$ дорівнює $F_{\max}(w^{'t}) = F_{\min}(w^{'k}) + \sum_{l=1}^{\varsigma} \varepsilon_l(w^{'k})\, \varepsilon_l^{'}$, R – множина дійсних чисел.

Послідовність розв'язків для упорядкованої задачі розміщення одногабаритних модулів при знаходженні глобального мінімуму має вигляд: $(F_{\max}(w^{'t}), F(w^{'*}), ..., F(w^{'**}), F_{\min}(w^{'k}))$, $F(w^{'*}) \geq F(w^{'**})$. З теореми та наслідків випливає, що для цієї послідовності існує симетрична: $F_{\min}(w^{'k}), F(w^{'**}), ..., F(w^{'*}), F_{\max}(w^{'t}))$, яка утворена однією і тією ж кількістю траспозицій однакових значень комбінаторної функції. Ця властивість характерна і для базової задачі.

Отже, аналіз зміни значень цільової функції в залежності від транспозиції перестановок (комбінаторних функцій) показує, що послідовність розв'язків для задачі розміщення одногабаритних об'єктів від меншого до більшого значень, отриманих за виразом (1), має свою симетрію, отриману за тим же виразом. Ця властивість в комбінаторній оптимізації пов'язана із симетрією комбінаторних множин (аргументу цільової функції). Отримані результати можна використовувати для аналізу зміни значень цільової функції в залежності від симетрії комбінаторних конфігурацій в задачах комбінаторної оптимізації різних класів.

Список використаних джерел

1. Селютин В. А. Машинное конструирование электронных устройств / В. А. Селютин. — М. : Сов. радио, 1977. — 384 с.
2. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. — К. : Наук. думка, 1981. — 281 с.
3. Стоян Ю. Г. Размещение источников физических полей / Ю. Г. Стоян, В. П. Путятин. — К. : Наук. думка, 1981. — 184 с.
4. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность : [пер. с англ.] / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. — М. : Мир, 1985. — 510 с.
5. Гуляницкий Л. Ф. О размещении разногабаритных элементов на печатных платах / Л. Ф. Гуляницкий, Н. К. Тимофеева // УСИМ. — 1982. — № 3. — С. 50—53.
6. Тимофеева Н. К. Зависимость целевой функции от нескольких переменных в задаче размещения объектов и ее решение методом структурно-алфавитного поиска / Н. К. Тимофеева // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 2. — С. 106—114.
7. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1981. — 543 с.
8. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру : [пер. с венгерского] / Э. Фрид. — М. : Мир, 1979. — 230 с.
9. Тимофеева Н. К. О гамильтоновом цикле и задаче коммивояжера / Н. К. Тимофеева / Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН Украины. — К., 1990. — 29 с. — Рус. — Деп.в ВИНИТИ 14.11.90, № 5742-В9010.
10. Тимофієва Н. К. Про симетрії комбінаторних множин та біологічних форм / Н. К. Тимофієва // System Analysis and Information Technologies, Proceedings of 16-th International Conference SAIT 2014 (May 26-30, 2014). — Kyiv, Ukraine. Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine «Kyiv Politechnic Institute», 2014. — P. 160—161.

11. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... д-ра. техн. наук: 01.05.02 / Н. К. Тимофієва, — К., 2007. — 32 с.
12. Тимофеева Н. К. Матрицы в задачах комбинаторной оптимизации / Н. К. Тимофеева // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 3. — С. 104—113.

Nadine TIMOFEEVA
Kyiv

ABOUT SYMMETRY PROPERTY IN PROBLEM OF PLACEMENT OF ONE DIMENSIONAL OBJECTS

For example of the problem of placement of one dimensional objects in a fixed position analyzes the property of symmetry, that occurs in combinatorial optimization. To this end, the systems of combinatorial functions are entered, which are set the input data. One of these systems describes the basic problem (given by). Other – ordered problem, which is formed from the base and is the simplest solvable case, which is easy to determine the global minimum and maximum. For these systems highlighted symmetric permutation and combinatorial functions, which are described by the laws of Euclidean geometry. It is proved that the value of objective function in finding the minimum forms sequence for which sequence of solutions formed by finding the maximum is symmetric.

Key words: the combinatorial optimization, the objective function, the permutation, the combinatorial function, the symmetry of combinatorial sets, placement of one dimension objects.

Надежда ТИМОФЕЕВА
г. Киев

О СВОЙСТВЕ СИММЕТРИИ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ОДНОГАБАРИТНЫХ ОБЪЕКТОВ

На примере задачи размещения одногабаритных объектов в фиксированные позиции анализируется свойство симметрии, которое имеет место в комбинаторной оптимизации. С этой целью вводятся системы комбинаторных функций, которыми задаются входные данные. Одна из этих систем описывает базовую задачу (заданную по условию). Другая – упорядоченную задачу, которая образуется из базовой и является самым простым разрешимым случаем, для которого несложно определять глобальные минимум и максимум. Для этих систем выделены симметричные перестановки и комбинаторные функции, которые описываются законами евклидовой геометрии. Доказано, что значение целевой функции при нахождении минимума образует последовательность, для которой последовательность решений, образующихся при нахождении максимума, является симметричной.

Ключевые слова: комбинаторная оптмизация, целевая функция, перестановка, комбинаторная функция, симметрия комбинаторных множеств, размещение одногабаритных объектов.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.2016