

## РОЗПІЗНАВАННЯ ФОРМИ ФАЗОВОЇ ТРАЄКТОРІЇ КОЛИВАНЬ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА ПІД РУХОМИМ ВІЗКОМ

Розглянуто спосіб розпізнавання форми фазової траєкторії коливань пружинного маятника під рухомих візком, яка відповідає нехаотичним рухам вантажу цього маятника. Спосіб базується на обчисленні інваріантних моментів зображень фазових траєкторій на фазовій площині.

Ключові слова: пружинний маятник, фазова площина, фазова траєкторія, центральні та інваріантні моменти.

У роботі Л. М. Куценко і О. М. Семківа [1] наведено спосіб розрахунку параметрів коливання у вертикальній площині пружинного маятника під рухомих візком, які б забезпечили нехаотичну траєкторію переміщення вантажу цього маятника. Вважається, що тіло пружини здійснює «двовимірне» коливання у вертикальній площині (подібно коливанню математичного маятника), і що конструктивно забезпечено незгинання осі пружини у поперечному напрямку (рис. 1). Для опису динаміки коливань необхідно визначити кінетичну і потенціальну енергії маятничкової системи, і за допомогою виразу лагранжіана скласти систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду. При цьому як узагальнені координати доцільно обрати такі параметри:  $u(t)$  – горизонтальне зміщення візка;  $v(t)$  – кут відхилення пружини від вертикалі;  $w(t)$  – пружне подовження (скорочення) пружини.

Для забезпечення нехаотичних коливань вантажу маятника запропоновано [1, 2] прийом проєкційного фокусування, який дозволяє визначити набір параметрів – довжини пружини  $d$ , маси візка  $M$  і вантажу  $m$  маятника, коефіцієнта жорсткості пружини  $k$ , та умов інтегрування системи рівнянь Лагранжа другого роду: початкових положення  $u_0$  і швидкості  $Du_0$  візка, початкових кута відхилення  $v_0$  і швидкості відхилення  $Dv_0$ , а також початкових подовження пружини  $w_0$  і швидкості подовження  $Dw_0$ . Усі величини в умовних одиницях. Для «тестового» прикладу обрано  $d = 5$ ;  $M = 500$ ;  $m = 86,8$ ;  $k = 750$ ;  $u_0 = 1$ ;  $Du_0 = 1$ ;  $v_0 = \pi/2$ ;  $Dv_0 = 0$ ;  $w_0 = 1$ ;  $Dw_0 = 0$ .

Сутність проєкційного фокусування полягає у наближеній побудові у фазовому просторі наближеної інтегральної кривої розв'язку системи рівнянь Лагранжа другого роду, та побудови її проєкції на координатну фазову площину, яка утворює фазову траєкторію. У загальному випадку геометричні образи цих кривих матимуть геометрично «заплутаний» вигляд (рис. 2, а). При певному критичному значенні (наприклад, параметра  $m$ ) інтегральна крива зміниться на якісному рівні – тобто «сфокусується», і перетвориться в «закономірну» криву (рис. 2, б).

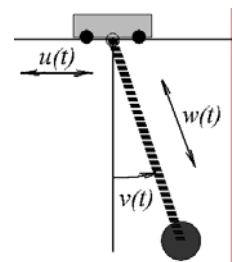


Рис. 1. Схема пружинного маятника під візком

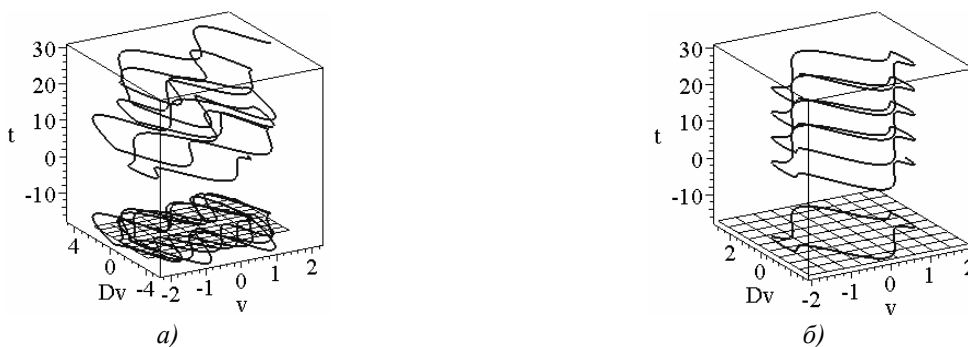


Рис. 2. Інтегральні криві і фазові траєкторії для:

а) випадкового значення  $m$ ; б) обчисленого критичного значення  $m=86,8$

На фазових площинах, наприклад, на площині  $\{v, Dv\}$ , спостерігатиметься ніби оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій (тобто проєкційне фокусування [4, 5]).

На практиці проєкційне фокусування має супроводжуватися побудовою графіка кількості пікселів на зображенні фазової траєкторії залежно від критичного значення змінного параметра, та визначенням екстремуму (мінімуму) цього графіка. Для формалізації знаходження екстремальних значень параметрів доцільно використовувати підходи, які базуються на ідентифікації фазових траєкторій коливань засобами розпізнавання образів.

Для визначення геометричних характеристик об'єктів на площині звичайно застосовують комбінації центральних моментів. Найпоширенішою є система інваріантних моментів Ming-Kuei Hu [3]. У роботі [6] надано пояснення ідеї побудови іншої групи моментів – афінних інваріантних, які базуються на геометрії трикутника, «жорстка» форма якого забезпечує інваріантність стосовно всіх афінних перетворень. Афінні інваріантні моменти докладно описані в роботах Флуссера Дж. і Сук Т. [4, 5].

Розробити спосіб розпізнавання форми фазової траєкторії коливань пружинного маятника під рухомим візком, яка відповідатиме нехаотичним рухам вантажу цього маятника; спосіб має базуватися на обчисленні інваріантних моментів зображень фазових траєкторій.

Для прикладу оберемо фігури кривих, які збігаються з обчисленими в роботі [1] фазовими кривими, що відповідають нехаотичним коливанням «тестового» пружинного маятника під рухомим візком (рис. 3, а). На рис. 3, б–г зображено фазові криві узагальнених координат  $u(t)$ ;  $v(t)$  і  $w(t)$ . Всі вони для аналізу коливань рівноцінні, адже одержані з тим самим набором параметрів коливання. Обираємо простішу криву зображену на рис. 3, г.

Обчисленню афінних моментів (1) для фігури (рис. 3, г) повинно передувати її визначення множиною точок  $M$ , яка для  $M$  має бути скелетною кривою. Множину  $M$  описано за допомогою R-кон'юнкції (тут і далі використано синтаксис мови Maple):

$$p := (a,b) \rightarrow (a + b - \text{abs}(a - b))/2.$$

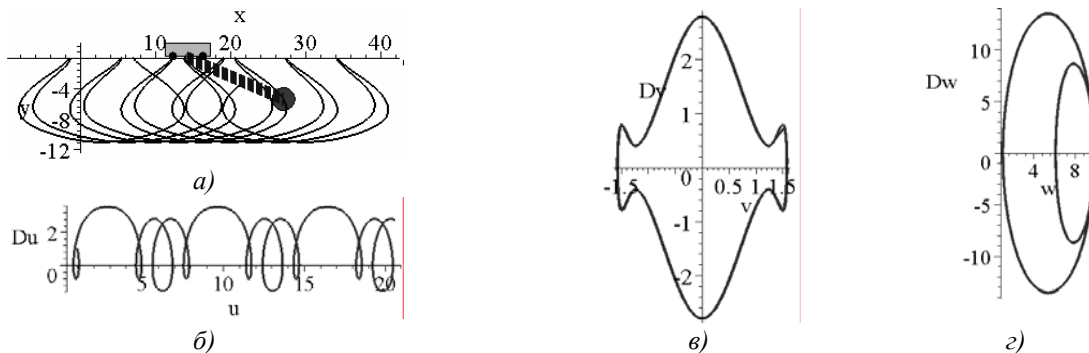


Рис. 3. Фазові траєкторії узагальнених координат пружинного маятника під рухомим візком

В результаті одержуємо опис у вигляді процедури-функції:

$$F1 := (x,y) \rightarrow 1 - (x-5)^2/5^2 - y^2/14^2;$$

$$F2 := (x,y) \rightarrow (x-7.5)^2/2.5^2 + y^2/9^2 - 1;$$

$$F := (x,y) \rightarrow E - \text{abs}(p(F1(x,y), F2(x,y)));$$

На рис. 4 наведено точкове зображення фазової траєкторії залежно від величини  $E$ .

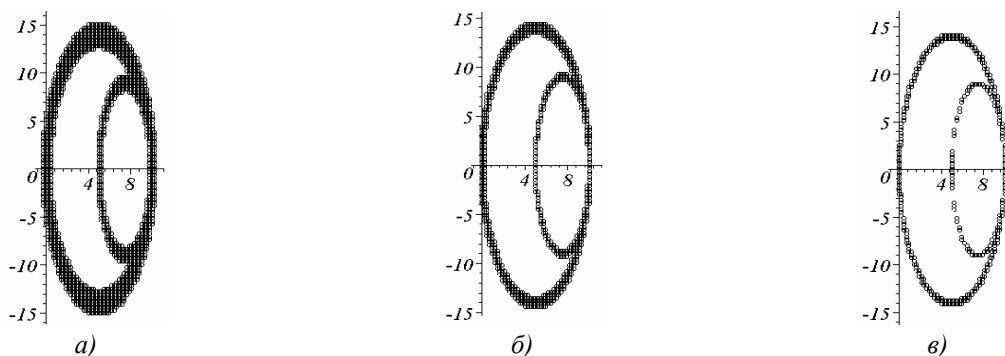


Рис. 4. Точкові зображення фазової траєкторії залежно від величини  $E$ : а)  $E = 0,2$ ; б)  $E = 0,1$ ; в)  $E = 0,05$

Тут  $E$  – параметр, який відповідає за «товщину» скелетної множини. При цьому вважатимемо, що при  $F(x,y) \geq 0$  значення функції у вузлах дорівнює одиниці, а в інших точках - нулю. В подальших розрахунках обираємо  $E=0,1$ .

У роботі [6] описано приклади використання афінних інваріантних моментів  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$  і  $I_8$ :

$$I_1 = (\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2) / \mu_{00}^4 ;$$

$$I_2 = (-\mu_{30}^2\mu_{03}^2 + 6\mu_{30}\mu_{21}\mu_{12}\mu_{03} - 4\mu_{30}\mu_{12}^3 - 4\mu_{21}^3\mu_{03} + 3\mu_{21}^2\mu_{12}^2) / \mu_{00}^{10} ;$$

$$I_3 = (\mu_{20}\mu_{21}\mu_{03} - \mu_{20}\mu_{12}^2 - \mu_{11}\mu_{30}\mu_{03} + \mu_{11}\mu_{21}\mu_{12} + \mu_{02}\mu_{30}\mu_{12} - \mu_{02}\mu_{21}^2) / \mu_{00}^7 ;$$

$$I_4 = (-\mu_{20}^3\mu_{03}^2 + 6\mu_{20}^2\mu_{11}\mu_{12}\mu_{03} - 3\mu_{20}^2\mu_{02}\mu_{12}^2 - 6\mu_{20}\mu_{11}^2\mu_{21}\mu_{03} - 6\mu_{20}\mu_{11}^2\mu_{12}^2) ; (1)$$

$$+ 12\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}\mu_{21}\mu_{12} - 3\mu_{20}\mu_{02}^2\mu_{21}^2 + 2\mu_{11}^3\mu_{30}\mu_{03} + 6\mu_{11}^3\mu_{21}\mu_{12}$$

$$- 6\mu_{11}^2\mu_{02}\mu_{30}\mu_{12} - 6\mu_{11}^2\mu_{02}\mu_{21}^2 + 6\mu_{11}\mu_{02}^2\mu_{30}\mu_{21} - \mu_{02}^3\mu_{30}^2) / \mu_{00}^{11} ;$$

$$I_5 = \sqrt{-4I_1^3I_2^2 + 12I_1^2I_2I_3^2 - 12I_1I_3^4 - I_2I_4^2 + 4I_3^3I_4} ;$$

$$I_6 = (\mu_{40}\mu_{04} - 4\mu_{31}\mu_{13} + 3\mu_{22}^2) / \mu_{00}^6 ;$$

$$I_7 = (\mu_{40}\mu_{22}\mu_{04} - \mu_{40}\mu_{13}^2 - \mu_{31}^2\mu_{04} + 2\mu_{31}\mu_{22}\mu_{13} - \mu_{22}^3) / \mu_{00}^9 ;$$

$$I_8 = (\mu_{20}^2\mu_{04} - 4\mu_{20}\mu_{11}\mu_{13} + 2\mu_{20}\mu_{02}\mu_{22} + 4\mu_{11}^2\mu_{22} - 4\mu_{11}\mu_{02}\mu_{31} + \mu_{02}^2\mu_{40}) / \mu_{00}^7 .$$

де  $\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-x_t)^p (y-y_t)^q f(x,y) dx dy$  – центральні моменти; тут  $x_t = m_{10}/m_{00}$ ,  $y_t = m_{01}/m_{00}$  – координати центру ваги фігури.

Перевіримо значення обчислень афінних інваріантних моментів у випадку, коли растрове зображення буде повернуто відносно початку координат (рис. 5).

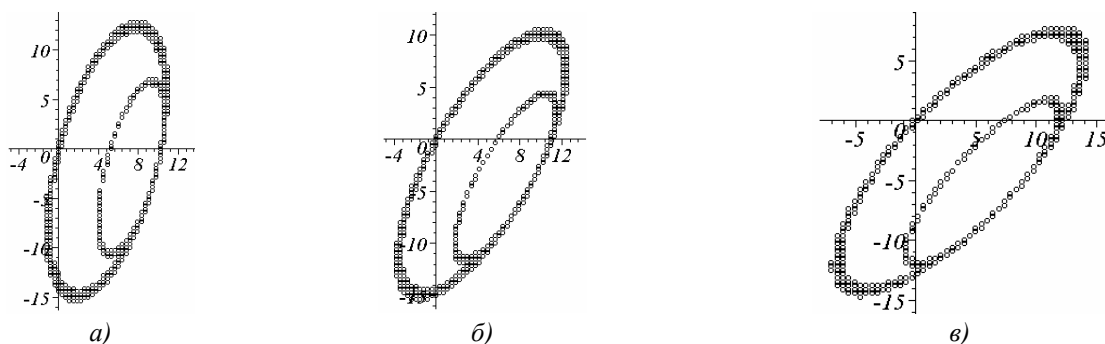


Рис. 5. Точкові зображення фазової траєкторії залежно від кута повороту (в радіанах):

a)  $-0,25$ ; б)  $-0,5$ ; в)  $-0,75$

У табл. 1 наведено одержані значення афінних інваріантних моментів залежно від кута повороту растрового зображення. Близькість наведених у таблиці значень афінних інваріантних моментів «по горизонталі» дає підстави вважати, що вони задовольняють умові обертової симетрії.

Таблиця 1

Значення афінних інваріантних моментів

Поворот на $-0,25$ радіан	Поворот на $-0,5$ радіан	Поворот на $-0,75$ радіан
$I1 := 0.3369086751$	$I1 := 0.3347283639$	$I1 := 0.3321307677$
$I2 := -0.2477526604 \cdot 10^{-5}$	$I2 := -0.1969834753 \cdot 10^{-6}$	$I2 := -0.1205617469 \cdot 10^{-5}$
$I3 := -0.0004288648456$	$I3 := 0.0002155851546$	$I3 := -0.0002261356380$
$I4 := -0.002603916734$	$I4 := -0.001743784683$	$I4 := -0.006883437654$
$I5 := 0.3990461627 \cdot 10^{-5}$	$I5 := 0.7087230846 \cdot 10^{-6}$	$I5 := 0.7558940096 \cdot 10^{-5}$
$I6 := 0.4109719897$	$I6 := 0.4097992213$	$I6 := 0.4080777469$
$I7 := 0.05045606643$	$I7 := 0.05031200893$	$I7 := 0.05002547537$
$I8 := 0.4988623921$	$I8 := 0.4952657006$	$I8 := 0.4904453568$

Показана властивість дозволяє використовувати значення афінних інваріантних моментів як «еталонні» при аналізі множини фазових траєкторій під час пошуку критичного значення «керуючого» параметра.

Для одержання значень афінних інваріантних моментів у поза критичних випадках необхідно будувати зображення фазових траєкторій для довільних значень «керуючого» параметра  $m$ . На рис. 6 наведено точкові зображення фазових траєкторій залежно від значення  $m$ . Критичним значенням є  $m = 86,8$ , що погоджується з результатами роботи [1].

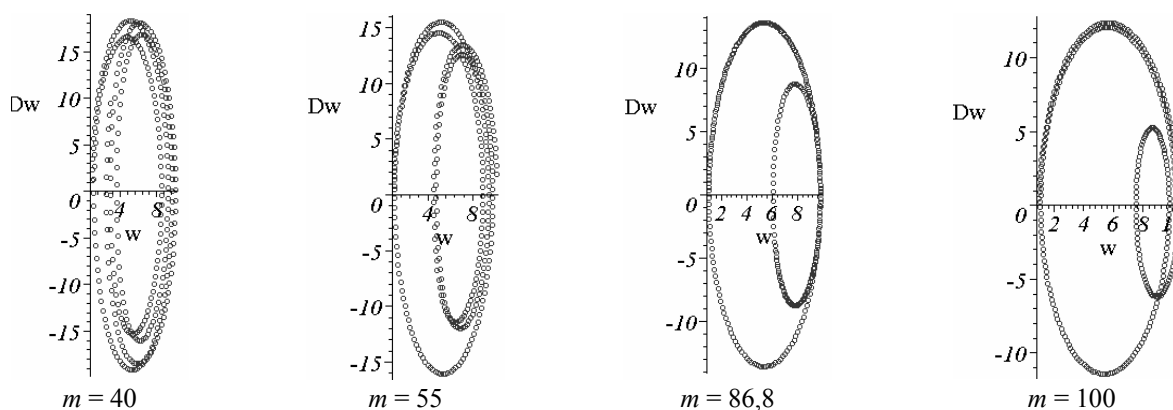


Рис. 6. Точкові зображення фазових траєкторій залежно від значення  $m$

Для виявлення на формальному рівні критичного значення  $m$  слід виконати такі кроки.

*Крок 1.* Визначити значення афінних інваріантних моментів для «трафаретного» зображення фазової траєкторії у вигляді таблиці, яка відповідає критичному значенню «керуючого» параметра.

*Крок 2.* Побудувати послідовність точкових зображень фазових траєкторій залежно від значення «керуючого» параметра.

*Крок 3.* Одержати послідовність таблиць значень афінних інваріантних моментів залежно від значення «керуючого» параметра.

*Крок 4.* Здійснити порівняння поточної таблиці з «трафаретною».

*Крок 5.* У випадку збігу значень афінних інваріантних моментів у строках таблиць (з наперед заданою точністю) закінчити обчислення і зафіксувати критичне значення «керуючого» параметра; інакше – перехід до кроку 2.

У результаті проведених комп'ютерних експериментів було виявлено ідентичність траєкторій руху під візком вантажів пружинного маятника при таких комбінаціях параметрів:

- 1)  $m_1 = 500$ ;  $m_2 = 86,8$ ;  $k = 750$  і  $d = 5$ ;
- 2)  $m_1 = 300$ ;  $m_2 = 52,4$ ;  $k = 450$  і  $d = 5$ ;
- 3)  $m_1 = 150$ ;  $m_2 = 40$ ;  $k = 250$  і  $d = 5$ .

Всі вони мають вигляд, зображений на рис. 7.

Складена програма комп'ютерної анімації дозволяє унаочнити результати коливань пружинного маятника під візком. А саме, зазначені коливання будуть ініціювати горизонтальне переміщення візка, яке пояснюється узгодженими з напрямком його руху процесами розпрямлення (рис. 7, а) і стиснення пружини (рис. 7, б).

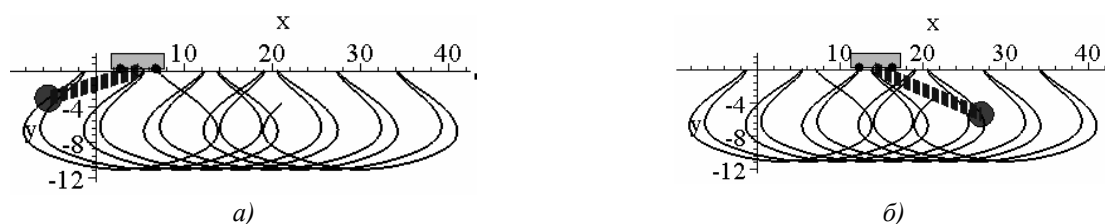


Рис. 7. Коливання пружинного маятника під візком при значеннях  $m_1 = 500$ ;  $m_2 = 86,8$ ;  $k = 750$  і  $d = 5$

Тобто, у першому випадку відстань між масами штучно збільшується, а у другому – зменшується, що впливає на положення візка. Напрямок і швидкість переміщення візка визначається початковою умовою  $Du_0 = 1$  (праворуч) або  $Du_0 = -1$  (ліворуч). Ці спостереження будуть корисними для аналізу причин руху різновидів інерціоїдів [7].

Розроблений спосіб розпізнавання форми фазової траєкторії коливань пружинного маятника під рухомим візком дозволить виявляти таку, яка відповідатиме нехаотичним рухам вантажу цього маятника. Спосіб базується на обчисленні інваріантних моментів зображень фазових траєкторій.

### Список використаних джерел

1. Семків О. М. Дослідження ініціювання руху візка за допомогою коливання 2d-пружинного маятника / Л. М. Куценко, О. М. Семків // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. Праць. — Мелітополь : МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. — Вип. 6. — С. 71—76.
2. Семків О. М. Графічний комп'ютерний спосіб визначення нехаотичних траєкторій коливань маятникових систем / О. М. Семків // Вестник Харьковского нац. автомобильно-дорожного университета. — Харьков : ХНАДУ, 2016. — Вип. 72. — С. 94—101.
3. Hu M. Visual pattern recognition by moment invariants / M. Hu // IRE Trans. Information Theory. — 1962. — Vol. IT-8. — P. 179—187.
4. Suk T. Graph method for generating affine moment invariants, in ICPR 2004 / T. Suk, J. Flusser // 17<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition, IEEE Computer Society, 2004, pp. 192—195.
5. Flusser J. Construction of complete and independent systems of rotation moment invariants, in CAIP 2003 / J. Flusser, T. Suk // Computer Analysis of Images and Patterns, Springer, 2003, pp. 41—48.
6. Морозова Г. В. Спосіб ідентифікації цифр за допомогою низки афінних інваріантних моментів / Г. В. Морозова, О. І. Сухарькова // Праці ТДАТУ. Мелітополь : ТДАТУ, 2013. — Вип. 4.— Т. 57. — С. 150—155.
7. Толчин В. Н. Инерциод. Силы инерции как источник поступательного движения [Электроний ресурс] / В. Н. Толчин. — Пермь : Пермское книжное издательство, 1977. — 103 с. — Режим доступа: [http://second-physics.ru/lib/books/tolchin\\_inertioid.djvu](http://second-physics.ru/lib/books/tolchin_inertioid.djvu).

**Olena SUKHARKOVA**  
Kharkiv

### DISCERNMENT OF THE FORM OF THE PHASE TRAJECTORY OF FLUCTUATIONS OF A SPRING PENDULUM UNDER THE RELATIVE FRAME CART

*The way of a discernment of a form of a phase trajectory of fluctuations of a spring pendulum under the relative frame cart which answers not chaotic movements of freight of this pendulum is considered. The way is based on calculation of the invariant moments of images of phase trajectories on the phase plane.*

*Key words : a spring pendulum, the phase plane, a phase trajectory, the central and invariant moments.*

**Елена СУХАРЬКОВА**  
г. Харьков

### РАСПОЗНАВАНИЕ ФОРМЫ ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА ПОД ПОДВИЖНОЙ ТЕЛЕЖКОЙ

*Рассмотрен способ распознавания формы фазовой траектории колебаний пружинного маятника под подвижной тележкой, которая отвечает нехаотическим движениям груза этого маятника. Способ базируется на вычислении инвариантных моментов изображений фазовых траекторий на фазовой плоскости.*

*Ключевые слова : пружинный маятник, фазовая плоскость, фазовая траектория, центральные и инвариантные моменты.*

Стаття надійшла до редколегії 05.10.2016