

Анатолий ХОМЧЕНКО

khan@kma.mk.ua

Евгений СИДЕНКО

emoty@mail.ru

г. Николаев

МЕТОД БАРИЦЕНТРИЧЕСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ НА КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ T21

В статье описан универсальный метод барицентрической конденсации для треугольного конечного элемента T21, в котором количество граничных узлов равно 15, а внутренних – 6. Данный метод позволяет избавиться от внутренних узлов. Это дает нам полное представление о природе барицентрической редукции. Также в статье представлено формализацию получения спектра узловых нагрузок, используя методику расчета пяти базисных функций. Другие случаи (T10, T15, T28) аналогичны. Результаты экспериментов со случайными блужданиями и гипотеза диффузионного пятна подсказывают, что в угловых узлах нагрузки следует уменьшать, а в ближайших к барицентру узлах – увеличивать. Полученные результаты моделирования показали преимущества предложенного подхода.

Ключевые слова: конечный элемент, треугольник высшего порядка, расчетный узел, барицентрическая конденсация.

В статье рассматривается треугольный конечный элемент с общим числом равномерно расположенных узлов – 21. Граничных узлов – 15, внутренних – 6. Такой элемент называют треугольником 5-го порядка. В методе конечных элементов (МКЭ) по известным причинам стремятся избавиться от внутренних узлов, сохранив при этом межэлементную непрерывность [1; 2; 4]. МКЭ может быть обобщен практически на неограниченный класс задач благодаря тому, что позволяет использовать элементы различных форм для получения сеточных разбиений нерегулярных областей. Размеры конечных элементов в разбиении могут различаться в десятки раз. Нагрузки и граничные условия могут иметь произвольный вид [1; 2]. Процедура устранения внутренних узлов называется конденсацией [8]. Ниже представляется универсальный способ конденсации, пригодный для всех конечных элементов высших порядков.

Чтобы не сталкиваться с явлением физической неадекватности спектра узловых нагрузок на границе КЭ (проблема Эргатудиса-Айронса-Зенкевича), мы с самого начала рекомендуем физически обоснованные «рецепты» распределения внутренней нагрузки (дугые моды) по граничным узлам.

Такой подход в принципе исключает противоестественные «рецепты» конденсации типа Джордана на квадрате (1970) или типа Сьярле-Равьяра на треугольнике (1972). Об этих «рецептах» можно также прочитать, например, в книге [5]. Альтернативным подходам посвящены статьи [3; 7].

Элемент T21 показан на рис. 1.

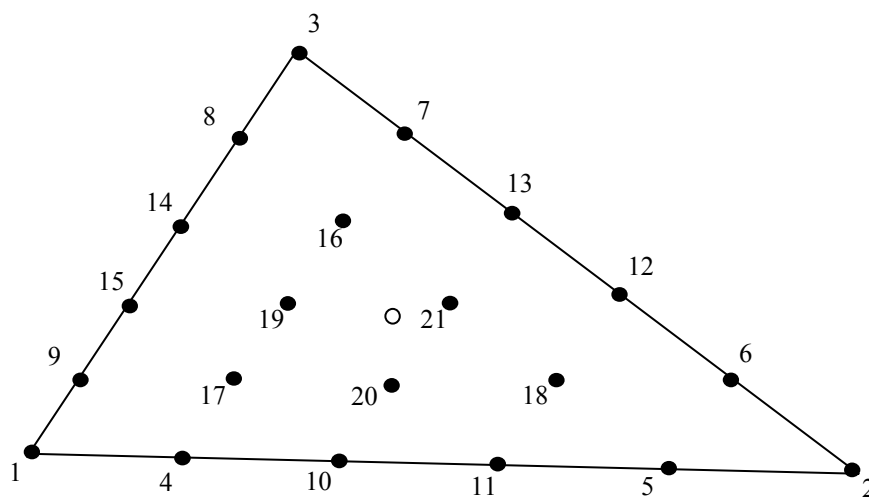


Рис. 1. Треугольник 5-го порядка
(светлый кружок – барицентр элемента)

Чтобы получить спектр узловых нагрузок, используем формулы интегрального усреднения базисных функций (коэффициентов Лагранжа):

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dS, i = \overline{1, 21}, \quad (1)$$

где γ_i – узловая доля единичной нагрузки от равномерной массовой силы; D – область интегрирования (треугольник 123); S – площадь КЭ, $N_i(x, y)$ – базисная функция, которая ассоциируется с узлом i . Базисные функции должны удовлетворять интерполяционной гипотезе Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k, \end{cases} \sum_{i=1}^{21} N_i(x, y), \quad (2)$$

где i – номер функции, k – номер узла.

Для получения базиса не обязательно составлять и решать СЛАУ 21×21 . На треугольных конечных элементах получил распространение геометрический метод, позволяющий выразить все функции через три барицентрические координаты $L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$, $L_3(x, y)$ основного треугольника (симплекса) 123. Чтобы получить полный набор узловых нагрузок γ_i , достаточно «пропустить» через формулу (1) только пять базисных функций: три граничных, например, N_1 , N_4 , N_{10} и две внутренние N_{16} и N_{19} . Эти функции приведены ниже:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{24} L_1 (5L_1 - 1)(5L_1 - 2)(5L_1 - 3)(5L_1 - 4); \\ N_4 &= \frac{25}{24} L_1 \cdot L_2 (5L_1 - 3)(5L_1 - 2)(5L_1 - 1); \\ N_{10} &= \frac{25}{12} L_1 \cdot L_2 (5L_1 - 2)(5L_1 - 1)(5L_2 - 1); \\ N_{16} &= \frac{125}{16} L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 (5L_3 - 2)(5L_3 - 1); \\ N_{19} &= \frac{125}{4} L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 (5L_1 - 1)(5L_3 - 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрировать в (1) лучше всего по формуле Холанда-Белла [6], которая специально приспособлена к барицентрическим координатам. Результат интегрирования таков:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{11}{1008}, i = 1, 2, 3; \quad \gamma_i = \frac{25}{1008}, i = 4, 5, \dots, 15; \\ \gamma_i &= \frac{200}{1008}, i = 16, 17, 18; \quad \gamma_i = \frac{25}{1008}, i = 19, 20, 21. \end{aligned}$$

На следующем шаге процедуры барицентрической конденсации мы концентрируем в барицентре всю нагрузку внутренних узлов Т21. Суммарная нагрузка в барицентре: $\gamma_0 = \frac{675}{1008}$. Этой нагрузке соответствует функция

$$N_0 = \frac{1125}{28} L_1 \cdot L_2 \cdot L_3, \quad (4)$$

которую мы назовем корректирующей. Эта функция позволяет генерировать множество базисов на элементе Т15 серендипова семейства (без внутренних узлов). Формула-генератор базисов Т15 имеет вид:

$$\overline{N}_i = N_i + \alpha_i \cdot N_0, i = \overline{1, 15}, \quad (5)$$

где N_i – «старая» функция (Т21); \overline{N}_i – «новая» функция (Т15); α_i – доля «внутренней» нагрузки $\frac{675}{1008}$, передаваемая из барицентра в граничный узел i . Если проинтегрировать (5), учитывая (1), мы получим формулу связи между «новым» и «старым» спектром.

$$\overline{\gamma}_i = \gamma_i + \alpha_i \times \gamma_0. \quad (6)$$

В простейшем случае $\alpha_i = \frac{1}{15}$ (равномерное распределение барицентрической нагрузки) каждый граничный узел получает по $\frac{45}{1008}$. Спектр нагрузок имеет вид:

$$\overline{\gamma}_i = \frac{56}{1008}, i = 1, 2, 3; \quad \overline{\gamma}_i = \frac{70}{1008}, i = 4, 5, \dots, 15.$$

Мы получили физически правдоподобный спектр. И все же он не безупречен. Результаты экспериментов со случайными блужданиями и гипотеза диффузионного пятна подсказывают, что в угловых узлах нагрузки следует уменьшать, а в ближайших к барицентру узлах – увеличивать. Читатель уже заметил, что так можно добиться совпадения теоретического спектра с эмпирическим. В качестве примера приведем еще одно (неравномерное) распределение:

$$\alpha_i = \frac{1}{27}, \overline{\gamma}_i = \frac{36}{1008}, i = 1, 2, 3;$$

$$\alpha_i = \frac{1}{15}, \overline{\gamma}_i = \frac{70}{1008}, i = 4, 5, \dots, 9;$$

$$\alpha_i = \frac{11}{135}, \overline{\gamma}_i = \frac{80}{1008}, i = 10, \dots, 15.$$

Выводы: на Т21 задача восстановления функции двух аргументов решается однозначно, на Т15 – решений множество. При этом поведение функции $f(x, y)$ на границе треугольника строго регламентировано. Барицентрическая конденсация – хороший пример «мягкого» моделирования (по В.И. Арнольду).

Список использованных источников

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М. : Мир, 1984. — 428 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
3. Ковалюк Д. В. Примеры адекватной статической конденсации на треугольном элементе четвертого порядка / Д. В. Ковалюк, А. Н. Хомченко // Вестник ХНТУ. — № 47 (2). — Херсон : ХНТУ, 2013. — С. 155—158.
4. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. — М. : Мир, 1981. — 304 с.
5. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. — М. : Мир, 1981. — 216 с.
6. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М. : Мир, 1977. — 350 с.
7. Хомченко А. Н. Про «м'яке» моделювання біквадратичного ССЕ / А. Н. Хомченко // Наукові праці: Наук.-метод. журнал «Комп'ютерні технології». — Вип. 201 (213). — Николаїв : ЧДУ ім. П. Могилі, 2013. — С. 106—108.
8. Хомченко А. Н. Конечные элементы высших порядков и барицентрическая конденсация / А. Н. Хомченко, Е. И. Литвиненко, И. А. Астионенко // Міжвузівський збірник «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво». — Вип. 6. — Луцьк, 2011. — С. 266—269.

Анатолій ХОМЧЕНКО, Євген СІДЕНКО
м. Миколаїв

МЕТОД БАРИЦЕНТРИЧНОЇ КОНДЕНСАЦІЇ НА СКІНЧЕННОМУ ЕЛЕМЕНТІ T21

У статті описаний універсальний метод барицентричної конденсації для трикутного скінченного елемента T21, в якому кількість граничних вузлів дорівнює 15, а внутрішніх – 6. Даний метод дозволяє позбутися від внутрішніх вузлів. Це дає нам повне уявлення про природу барицентричної редукції. Також в статті представлено формалізацію отримання спектра вузлових навантажень, використовуючи методику розрахунку п'яти базисних функцій. Інші випадки (T10, T15, T28) аналогічні. Результати експериментів з випадковими блуканнями і гіпотеза дифузійної плями підказують, що в кутових вузлах навантаження слід зменшувати, а в найближчих до барицентра вузлах – збільшувати. Отримані результати моделювання показали переваги запропонованого підходу.

Ключові слова: кінцевий елемент, трикутник вищого порядку, розрахунковий вузол, барицентрична конденсація.

Anatoly KHOMCHENKO, Ievgen SIDENKO
Mykolaiv

BARYCENTRIC CONDENSATION METHOD ON THE FINITE ELEMENT T21

In this article the universal method of barycentric condensation for triangular finite element T21, which the number of border nodes is equal 15 and internal – 6 is analyzed. This method allows to get rid of internal nodes. This gives us a complete idea of the nature of the barycentric reduction. In the article also presents the formalization of obtaining the spectrum of nodal loads using the method of calculation of the five basic functions. Other cases are (T10, T15, T28) similar. Results of experiments with random walks and hypothesis of diffusion spot suggest that the load in corner units should be decreased, and the load in the nearest to the bary-center units should be increased. These simulation results indicated the benefits of the proposed approach.

Key words: finite element, the highest order triangle, current node, barycentric condensation.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.2016