УДК 514.18
Ольга ШОМАН, Володимир ДАНИЛЕНКО
м. Харків
olgasho@ukr.net, vladdanyl@ukr.net

ЗАГАЛЬНІ ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Досліджено розвиток аналітичних підходів до розв'язування задач побудови геометричних моделей та спеціальних графічних зображень. Розглянуто проблему, яка пов'язується з логікою проекційних графічних операцій під час моделювання в інженерній практиці. З'ясовано, що більшість спеціальних графічно-проекційних зображень – це сумарний результат паралельного або центрального проеціювання (тобто загальних елементів) та відповідних додаткових операцій.

Ключові слова: геометричне моделювання, проекційні геометричні моделі, перетворення простору, перетворення координат, спеціальні графічні зображення.

Спрямованість розвитку методів геометричного моделювання в бік забезпечення графічних інформаційних технологій пов'язана з більш досконалими підходами до формування графічної інформації, що несе з собою широке використання спеціальних зображень. Кожен з типів спеціальних геометричних зображень (перспектива, проекції з числовими позначками, векторні проекції академіка Є. С. Федорова і т. ін.) з успіхом використовується в архітектурі, будівництві, гірничій справі та інших галузях інженерної діяльності. Незважаючи на певні розбіжності, побудова спеціальних зображень має спиратися на загальне математичне ядро, що полягає у використанні перетворень простору і перетворень координат. Тому проблемна задача полягає у визначенні ядра формування зображень і показі відмінностей кінцевих етапів побудови кожного типу спеціальних графічних зображень.

В статті приділено увагу саме спеціальним проекційним зображенням. В геометричному моделюванні об'єктів базову позицію і дотепер займають методи формування проекційних моделей та їх зображень. Тому важливо забезпечити ними процес проектування інженерних об'єктів (особливо на початкових етапах).

У попередні десятиліття достатньо широко вивчені інженерні можливості формування спеціальних зображень. Були розроблені методики і способи їх побудови [1, 4, 10]. Огляд літератури виявляє наступне: по-перше, відомості у різних роботах про спеціальні зображення часто подані в ознайомчому форматі; по-друге, не узагальнено теоретичне підґрунтя формування спеціальних зображень як технології геометричного моделювання; по-третє, матеріал (навчальний і науковий) щодо опису методів та способів побудови спеціальних зображень складає окремі розділи і міститься в літературі, що забезпечує окремі предметні та практичні інженерні задачі. Розвиток аналітичних підходів до розв'язування задач побудови геометричних моделей та спеціальних графічних зображень дещо відкинув з розгляду їх проекційну природу. Тому в статті розглядається проблема, яку пов'язано з логікою проекційних графічних операцій під час моделювання в інженерній практиці, а також визначається фактор сутності спеціальних геометричних моделей. Матеріал статті носить загальнотеоретичний характер і базується на аналізі наукових засад геометричного моделювання.

Відомо [7], що з позицій геометричного моделювання відображенням множини $\{X\}$ у множину $\{X'\}$ є відповідність кожного елемента X множини $\{X\}$ певному елементу X' множини $\{X'\}$. В проекційних моделях відбувається взаємно однозначне обернене відображення. Кожній точці простору відповідають її проекції. Відображення здійснюється завдяки операції проеціювання, а оберненість забезпечують проекційні промені. Щодо взаємної однозначності, то в кожному випадку має бути бінарне проекційне зображення або монопроекція, до якої надано додаткові дані.

Практична реалізація перетворень проекційних моделей можлива за умови взаємно однозначного та оберненого зв'язку між етапами перетворень, що традиційно реалізують класичні методи допоміжного проеціювання, проективних перетворень (перспективно-афінних, гомотетичних, гомологічних та їх комбінацій), топологічних і квадратичних перетворень [9].

Надамо загальнотеоретичне підґрунтя для роботи з проекційними геометричними моделями.

Тлумачення об'єкта (точки) простору в геометричному моделюванні можна робити двома шля-

хами [5]. Так званий «пасивний» шлях полягає у визначенні координат точки, заданої в одній системі координат, відносно іншої системи координат. При цьому сам об'єкт (точка) відображується на себе («залишається собою»), тобто здійснюється перетворення координат: $M(x, y, z) \equiv M'(x', y', z')$. Перетворення простору (відображення точки в просторі, що "залишається собою", на іншу точку) відноситься до «активного» шляху визначення об'єктів (точок) простору. При цьому нова точка $M'(x', y', z')$ визначається фактично в тій же системі координат. Використовуючи підходи геометричного моделювання (перетворення простору і перетворення координат), можна описувати відповідність проекцій (образів) своїм об'єктам (прообразам).

Більшість спеціальних графічно-проекційних зображень – це [3] сумарний результат паралельного або центрального проеціювання (ядра, тобто загальних елементів) та відповідних додаткових операцій. На рис. 1 наведено схему паралельного проеціювання. Проекційний промінь $\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}$ (де l, m, n – коефіцієнти, що визначають напрям проеціювання) забезпечує відображення деякої точки M простору в точку M' площини-картини $Ax' + By' + Cz' + D = 0$ (де A, B, C, D – коефіцієнти). Таке відображення є перетворенням простору, і координати $M'(x', y', z')$ є лінійними функціями координат $M(x, y, z)$ вигляду [2, 5, 12]

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \end{cases}$$

де коефіцієнти a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3 вміщують в собі коефіцієнти l, m, n, A, B, C, D.

В системах координат площини проекцій $Ax' + By' + Cz' + D = 0$ проекції $M'(x', y', z') \equiv M''(x'', y'', 0)$, тобто відображуються у самих себе, і це є перетворенням координат. В свою чергу, координати $M''(x'', y'')$ є лінійними функціями координат $M'(x', y', z')$ вигляду [3, 12]

$$\begin{cases} x'' = g_1(x' - x_0) + g_2(y' - y_0) + g_3(z' - z_0), \\ y'' = g_4(x' - x_0) + g_5(y' - y_0) + g_6(z' - z_0), \\ z'' = 0, \end{cases}$$

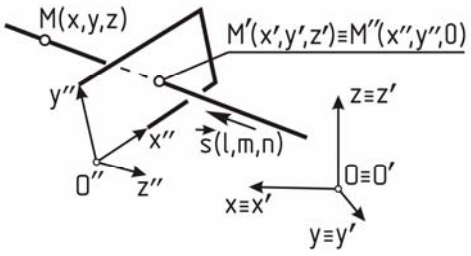


Рис. 1. Схема паралельного проеціювання

де x_0, y_0, z_0 – координати проекції O'' відносно системи $O'x'y'z'$; g_1, g_2, g_3 – напрямні косинуси осі $O''x''$ відносно системи $O'x'y'z'$; g_4, g_5, g_6 – напрямні косинуси осі $O''y''$ відносно системи $O'x'y'z'$.

Таким чином, паралельне проеціювання визначається добутком перетворень вигляду $f(M) = f''(f'(M)) = M''$.

Схема центрального проеціювання (рис. 2) демонструє елементи перетворення простору і перетворення координат. Проекційний промінь $\frac{x-x'}{p-x'}=\frac{y-y'}{q-y'}=\frac{z-z'}{r-z'}$ пов'язує точку M, центр проеціювання $S(p, q, r)$ і проекцію M'. Залежності між координатами образу і прообразу є дробово-лінійними і мають вигляд [2, 5, 12]

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}, \\ y' = \dfrac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}, \\ z' = \dfrac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}. \end{cases}$$

Перетворення координат є таким же, як і у випадку паралельного проеціювання: $M'(x', y', z') \equiv M''(x'', y'', 0)$. Підсумковий добуток $f(M) = f''(f'(M)) = M''$ характеризує послідовне виконання двох етапів центрального проеціювання.

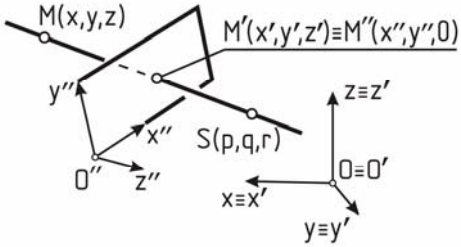


Рис. 2. Схема центрального проеціювання

Наведені перетворення забезпечують відображення об'єкта, що існує в просторі, на площину-носій зображення. Такі зображення є монопроекційними (моноструктурними). Монопроекція – це результат тільки однієї дії з алгоритму створення проекційної моделі об'єкта. А для одержання закінченого алгоритму проекційної моделі, тобто для виконання умови однозначного оберненого зв'язку між об'єктом і проекціями, потрібні не моно-, а біструктури [8]. Відомі типи наочних і спеціальних геометричних зображень завжди підпорядковані перетворенням простору та перетворенням координат (тобто ядру проеціювань) і є бімоделями об'єктів. До спеціальних відображень об'єкта, які містять етапи центрального і паралельного проеціювань, можна також віднести радіально-паралельне проеціювання (RP-проеціювання) [6].

Розглянемо сутність спеціальних проекційних зображень з позицій технології геометричного моделювання.

Геометричною проекційною моделлю об'єкта в результаті центрального проеціювання є перспектива [10], тому її утворення супроводжується перетворенням простору і перетворенням координат як при центральному проеціюванні. Бімодель об'єкта на картинній площині (рис. 3) складається з центральної проекції a' самого об'єкта та центральної проекції a'_1 його ортогональної (горизонтальної) проекції. Ця модель є оберненою і має взаємно однозначний зв'язок з об'єктом.

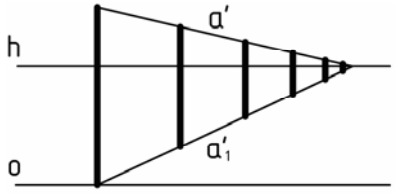


Рис. 3. Схема центрально-проекційної моделі (перспективи)

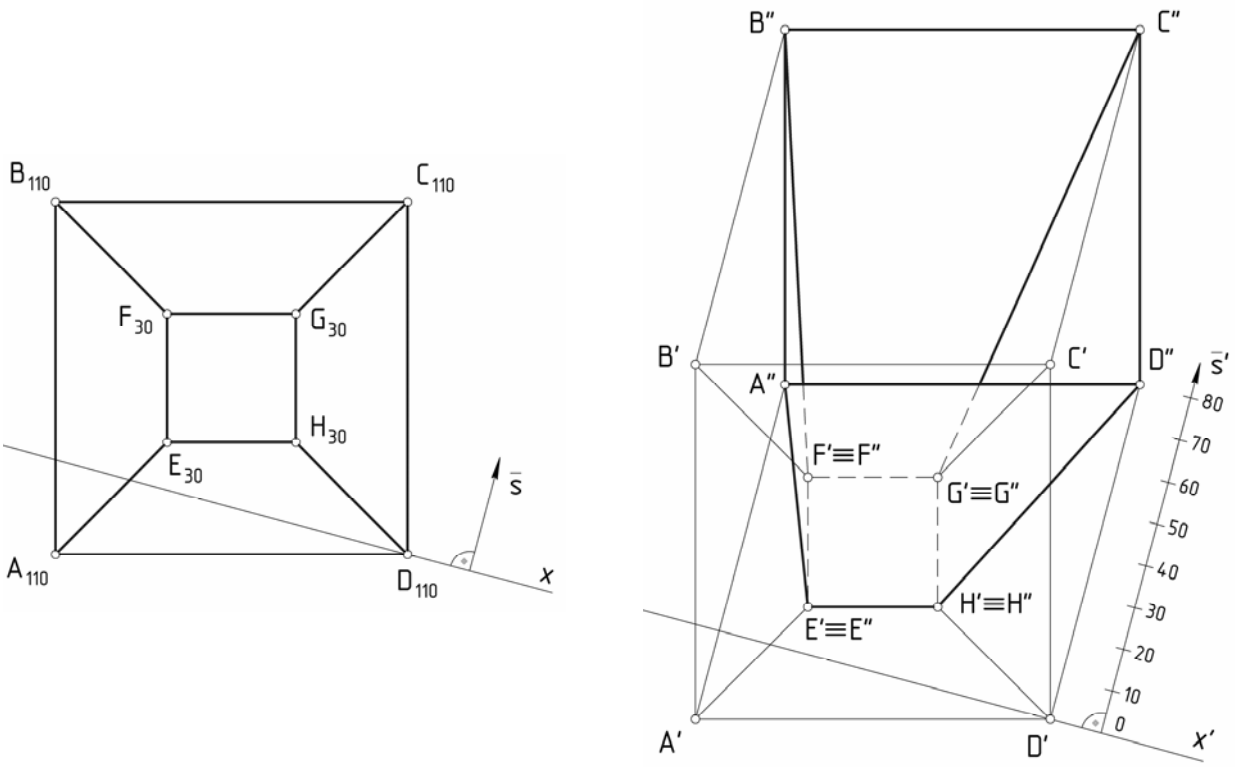
Створення проекційної моделі з числовими позначками потребує перетворення простору та перетворення координат для одержання паралельної (ортогональної) монопроекції об'єкта на площині. Але таке зображення об'єкта не забезпечує оберненості моделі та однозначного його відтворення у просторі. Лише за умови накладання на проекцію додаткових даних можна стверджувати про сформовану бімодель об'єкта (рис. 4). Як відомо [4], цими даними є відстані до точок об'єкта від площини проекцій.

Векторні проекції акад. Є. С. Федорова [1] базуються на монопроекціях об'єкта на площину і є похідними від проекцій з числовими позначками. Оберненість і взаємна однозначність між проекціями та об'єктом обумовлені сукупністю даних, одержаних в результаті виконання перетворення простору і перетворення координат з доданням числових позначок. Наступні геометричні операції виконуються таким чином: з дотриманням заданого напряму вектора і з використанням значень різниці відстаней точок об'єкта від площини проекцій формуються векторні проекції Є. С. Федорова. Вони забезпечують бімодель об'єкта (приклад – проекції D' та D'' точки D і т. ін. на рис. 5).

а) *б)*

Рис. 4. Схема проекційної моделі з числовими позначками:

а – наочне зображення; *б* – кресленик



а) *б)*

Рис. 5. Схема формування векторних проекцій акад. Є. С. Федорова:
а – кресленик в проекціях з числовими позначками; *б* – векторна проекція

Спеціальне графічне зображення RP-проекція $f(x, y) > 0$ [6, 11] (рис. 6) залежить від центральної проекції об'єкта на поверхні-носії (сфері), яка пов'язана з самим об'єктом $F(x, y, z) > 0$. Щодо оберненості перетворення та взаємно однозначного проекційного зв'язку RP-проекції та об'єкта, то останній без додаткових даних не може бути однозначно визначеним у ході оберненого перетворення за наявності лише його RP-проекції (монопроекції), оскільки тілесний кут, в який вписано об'єкт, окреслює цілу сім'ю гомотетичних об'єктів (рис. 7). Додаткові дані для однозначного просторового визначення об'єкта можуть бути одержані за допомогою аналітичних описів.

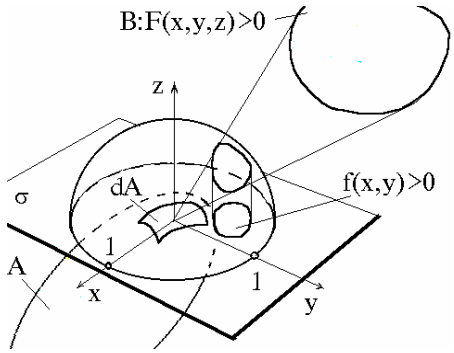


Рис. 6. Схема радіально-паралельного проеціювання

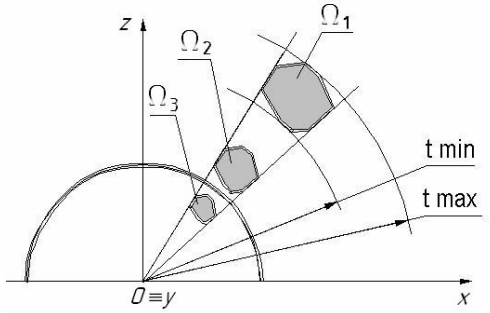


Рис. 7. Гомотетичні об'єкти Ω_1 і Ω_2 та їх спільна центральна проекція Ω_3 на сфері

Спираючись на аналіз наукового матеріалу в галузі прикладної геометрії, можна вважати формування спеціальних проекційних зображень певною технологією геометричного моделювання.

Список використаних джерел

1. Горно-инженерная графика / [Г. Г. Ломоносов, А. И. Арсентьев, И. А. Гудкова и др.]. — М. : Недра, 1976. — 264 с.
2. Даниленко В. Я. Проекційні елементи синергетичного перетворення простору / В. Я. Даниленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К. : КНУБА, 2000. — Вип. 67. — С. 188–190.
3. Даниленко В. Я. Синергетичні та системні можливості параметризації об'єктів і перетворень простору /

В. Я. Даниленко // Системні технології. — Дніпропетровськ : ДНВП МОНУ «Системні технології», 2006. — Вип. 2(43). — С. 73–78.
4. Кизима Р. А. Нарисна геометрія. Ортогональні проекції і проекції з числовими позначками: навч. посіб. / Р. А. Кизима. — К. : ІЗМН, 1997. — 180 с.
5. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2 т. / Ф. Клейн ; [пер. с нем.]. — М. : Наука, 1987. — Т. 2. : Геометрия. — 416 с.
6. Куценко Л. Н. Приближенный метод вычисления локальных угловых коэффициентов излучения / Л. Н. Куценко, О. В. Шоман // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К. : КДТУБА, 1996. — Вип. 60. — С. 46–49.
7. Моденов П. С. Геометрические преобразования / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. — М. : МГУ, 1961. — 232 с.
8. Рыжов Н. Н. Метрика бинарных моделей пространства и алгоритмизация решения метрических задач / Н. Н. Рыжов // Сб. науч.-методич. статей «Начертательная геометрия и инженерная графика». — М. : МПИ, 1989. — Вып. 15. — С. 82—85.
9. Фролов С. А. Методы преобразования ортогональных проекций / С. А. Фролов. — М. : Машиностроение, 1963. — 144 с.
10. Шмидт Р. Учение о перспективе / Р. Шмидт ; [пер. с нем.]. — М. : Стройиздат, 1983. — 120 с.
11. Шоман О. В. Конструктивні підходи до опису RP-проекцій геометричних об’єктів / О. В. Шоман // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — 2012. — Вип. 89. — С. 392—396.
12. Шоман О.В. Основи інженерної графіки та геометричного моделювання в середовищі AutoCAD / О. В. Шоман. — Х. : НТУ «ХПІ», 2014. — 288 с.

Olga SHOMAN, ***Volodymyr DANYLENKO***
Kharkiv

GENERAL ELEMENTS OF THE SPECIAL IMAGES

Development of the analytical going is investigational near the decision of problems of construction of geometrical models and special graphic images. The problem related to logic of projection graphic operations at a modeling in engineering practice is considered. It is found out that the most special graphic projection images are a total result of parallel or central projection acts (i.e. general elements) and the proper additional operations.

Keywords: geometrical modeling, projection geometrical models, transformation of space, transformation of coordinates, special graphic images.

Ольга ШОМАН, ***Владимир ДАНИЛЕНКО***
г. Харьков

ОБЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Исследовано развитие аналитических подходов к решению задач построения геометрических моделей и специальных графических изображений. Рассмотрена проблема, связанная с логикой проекционных графических операций при моделировании в инженерной практике. Выяснено, что большинство специальных графических проекционных изображений – это суммарный результат параллельного или центрального проецирования (т.е. общих элементов) и соответствующих дополнительных операций.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, проекционные геометрические модели, преобразование пространства, преобразование координат, специальные графические изображения.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.2016