

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ СТОСОВНО ДО ТЕОРЕТИЧНОГО КРЕСЛЕННЯ КОРПУСУ СУДНА

У статті розглядається новий підхід до моделювання плоских кривих із застосуванням лінійної залежності розподілу кривини від довжини дуги. Крива, що моделюється задається в табличній формі. В початковій і кінцевій точках кривої визначаються кути нахилу дотичних. Розроблено програму розрахунків і візуалізації отриманих результатів на ПЕОМ.

Ключові слова: плоска крива, комп'ютерне моделювання, лінійна залежність розподілу кривини, довжина дуги.

Широке застосування кривих ліній в науці і техніці, поява нових сфер їх застосування спонукають фахівців з прикладної геометрії розробляти нові підходи до моделювання ліній, адаптуючи їх до потреб практики. Особливої важливості питання моделювання ліній набуває при проектуванні теоретичного креслення корпусу судна. Криві, що описують ватерлінії, шпангоути і батокси та отримані інтерполяцією опорних точок, мають бути інваріантними по відношенню до повороту системи координат і залежати тільки від розташування опорних точок. У той же час крива та її перша похідна мають бути неперервними, а кривина лінії, отриманої в результаті інтерполяції, має в найбільшому ступені визначатися лінійною залежністю від її довжини та бути неперервною функцією. Таким чином, при моделюванні ліній теоретичного креслення корпусу судна на базі сукупності опорних точок необхідно забезпечувати другий порядок гладкості.

Розглядаючи відомі в математиці криві, можна прийти до висновку, що поставленим вище умовам може задовольняти тільки модифікована клотоїда.

У практиці суднобудування при побудові теоретичного креслення корпусу судна часто використовують так звані прості інтерполятори [7], які задовольняють умовам неперервності в опорних точках функції та її першої похідної. При цьому застосовуються параметричні поліноми степеня не нижче третього. Недоліком поліноміального подання ліній корпусу судна є наявність відносного екстремального значення кривини кривої між двома опорними точками. Зокрема, для кривих, що мають малу зміну кривини, характерно місцеве «випинання» у випадку, коли опорні точки знаходяться недостатньо близько одна до одної.

Останнім часом при моделюванні кривих почали застосовуватися їх параметричні рівняння, в яких параметром виступає довжина дуги кривої. Це означає, що для таких кривих можуть бути знайдені їх рівняння в функції довжини дуги. Але, на жаль, подібних кривих дуже мало і не всі вони придатні до практичного застосування, тому автори робіт [1–6, 8–10] при моделюванні кривих, що відповідають певним умовам, змушені приймати до розгляду лінійні, квадратичні, кубічні, синусоїдальні та інші залежності розподілу кривини від довжини дуги та визначати невідомі коефіцієнти цих залежностей в процесі моделювання кривої, яка відповідає заданим умовам проектування того чи іншого об'єкту або виробу.

Автори робіт [2, 4, 10] пропонують моделювати криві із застосуванням лінійних законів розподілу їх кривини, які беруть їх у вигляді:

$$k = as + b,$$

де s – довжина дуги кривої, a і b – невідомі коефіцієнти.

Ці коефіцієнти визначаються за умови, що відомі початкова і кінцева точки кривої та кути нахилу в них дотичних.

Метою роботи є моделювання та дослідження інтерполяційних плоских кривих ліній, які задаються певною сукупністю опорних точок, забезпечують в точках стикування другий порядок гладкості, а кривина кривої лінійно залежить від довжини дуги. Задача розв'язується за умови, що задані кути нахилу дотичних в початковій і кінцевій точках кривої. Змодельовані криві мають бути придатними для побудови теоретичного креслення корпусу судна.

Побудуємо довільну криву, задану деякою послідовністю точок і відомими кутами нахилу дотичних в першій та останній точках. На рис. 1 показані вихідні точки, з'єднані ламаною лінією, яку

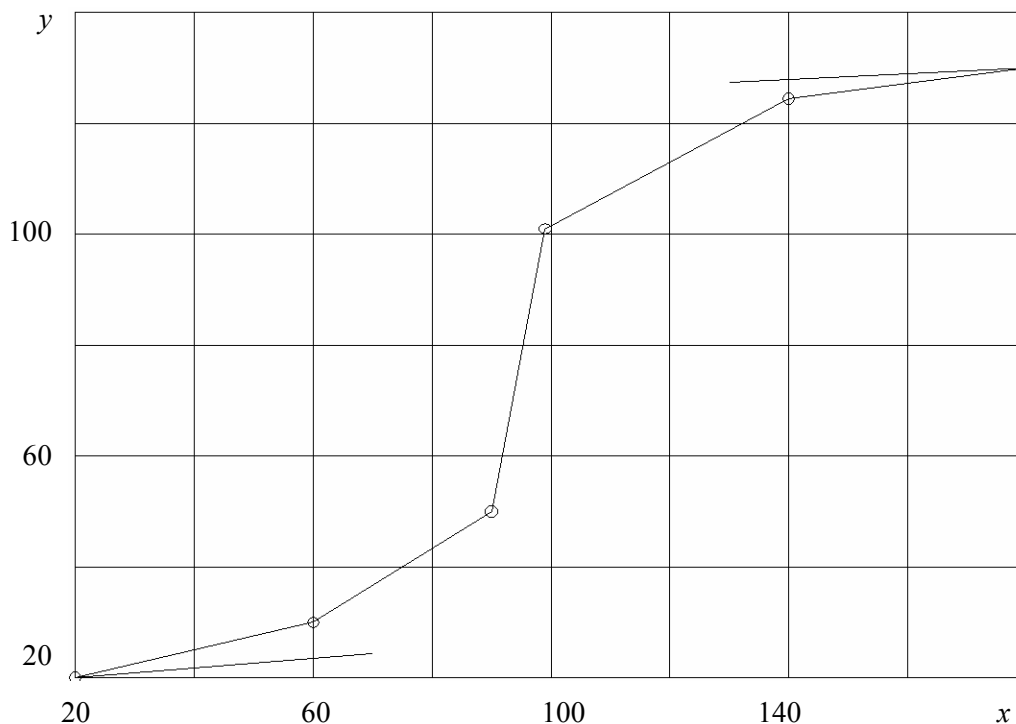


Рис. 1. Вихідні дані для побудови інтерполяційної кривої

можна розглядати як інтерполяційну криву нульового порядку гладкості. В початковій і кінцевій точках проведені відрізки прямих ліній, кути нахилу яких задаються з вихідними даними. Необхідно за заданих вихідних даних побудувати інтерполяційну криву другого порядку гладкості.

Розглянемо ділянку кривої, яка визначається двома послідовними опорними точками x_i, y_i і x_{i+1}, y_{i+1} . Дотичні до кривої в цих точках мають кути нахилу до осі x , відповідно, α_i і α_{i+1} .

Запишемо рівняння клотоїди в наступному вигляді

$$\begin{aligned} x(s) &= x_i + b_i \int_{-1}^s \cos \Phi_i(s) ds, \\ y(s) &= y_i + b_i \int_{-1}^s \sin \Phi_i(s) ds, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\Phi_i(s) = \varphi_i - \psi_i s + \gamma_i (s^2 - 1)$.

При цьому кути φ_i і ψ_i визначаються за виразами

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i+1}); \\ \psi_i &= \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_{i+1}), \end{aligned}$$

тобто вони залежать від кутів нахилу дотичних в суміжних точках.

Для побудови ділянки кривої між точками x_i, y_i і x_{i+1}, y_{i+1} необхідно знайти константи b_i і γ_i . Для визначення цих констант розглянемо ділянку кривої в координатній системі \bar{X}, \bar{Y} з початком координат в точці x_i, y_i , яка обертається на кут η_i , який є кутом нахилу до осі абсцис відрізка прямої, що з'єднує i -у та $(i+1)$ -у точки модельованої кривої.

Можна легко побачити, що при $s = 1$ мають виконуватися наступні умови:

$$\bar{y}(1) = 0 = b_i \int_{-1}^1 \cos(\Phi_i(s) - \eta_i) ds; \quad (2)$$

$$\bar{x}(1) = d_i = b_i \int_{-1}^1 \sin(\Phi_i(s) - \eta_i) ds, \quad (3)$$

де $d_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$.

Оскільки d_i не дорівнює нулю, то і b_i не може дорівнювати нулю. В зв'язку з цим рівняння (2) може бути застосованим для ітеративного визначення константи η_i . Константа b_i визначається із рівняння (3). Сучасна комп'ютерна техніка дозволяє числовими методами визначати константи η_i і b_i без особливих проблем.

Для розрахунку за виразами (1) декартових координат точок кривої необхідно знати кути α_i і α_{i+1} нахилу дотичних в опорних точках. Ці кути також будемо визначати числовим методом. За перше наближення цих кутів, що дозволить розпочати процес їх пошуку, пропонується прийняти кути, які дорівнюють кутам нахилу відрізків прямих, що з'єднують попередню і наступну опорні точки (рис. 2). На цьому рисунку видно, що дотичні до майбутньої кривої в опорних точках розташовані паралельно відрізкам прямих, які з'єднують $(i-1)$ -у та $(i+1)$ -у опорні точки.

На рис. 3. показано інтерполяційну криву, побудовану із застосуванням кутів нахилу дотичних за вище означеною схемою. Ці результати можна розглядати, як інтерполяційну криву вихідного наближення. На перший погляд ця крива має прийнятний характер. Але при більш ретельному розгляді можна прийти до висновків, що бажано поліпшити характер проходження кривої на першій, середній та останній її ділянках. Це є наслідком того, що моделювання кривої відбувалося без прийняття до

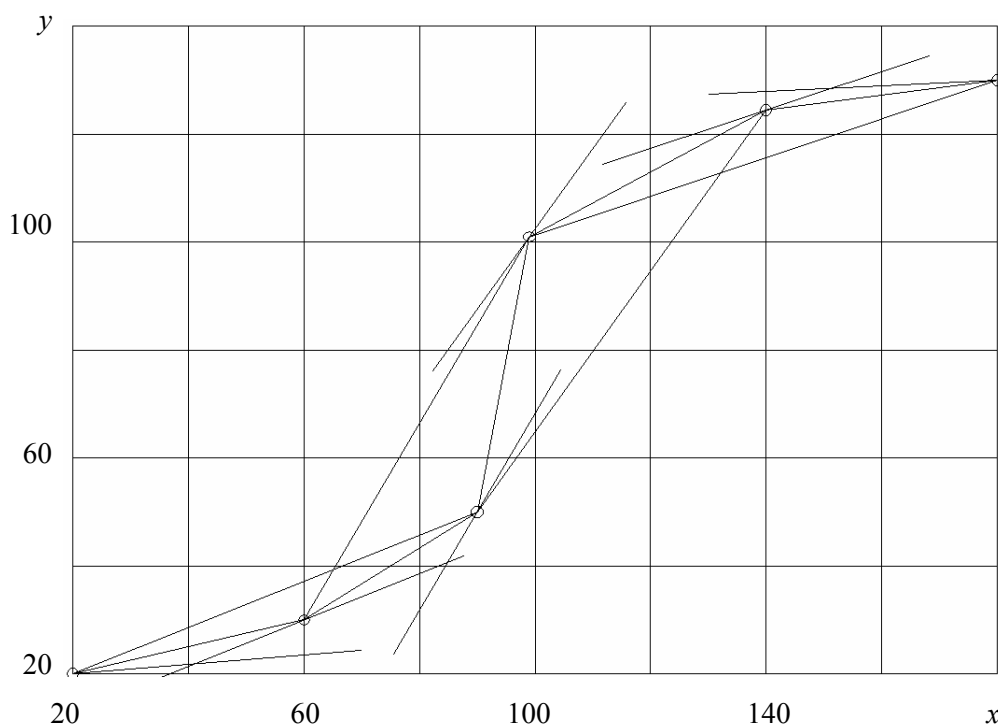


Рис. 2. До визначення кутів нахилу дотичних в проміжних точках

уваги того факту, що в опорних точках ця диференціальна характеристика, розрахована наприкінці попередньої і на початку наступної ділянки має бути однаковою.

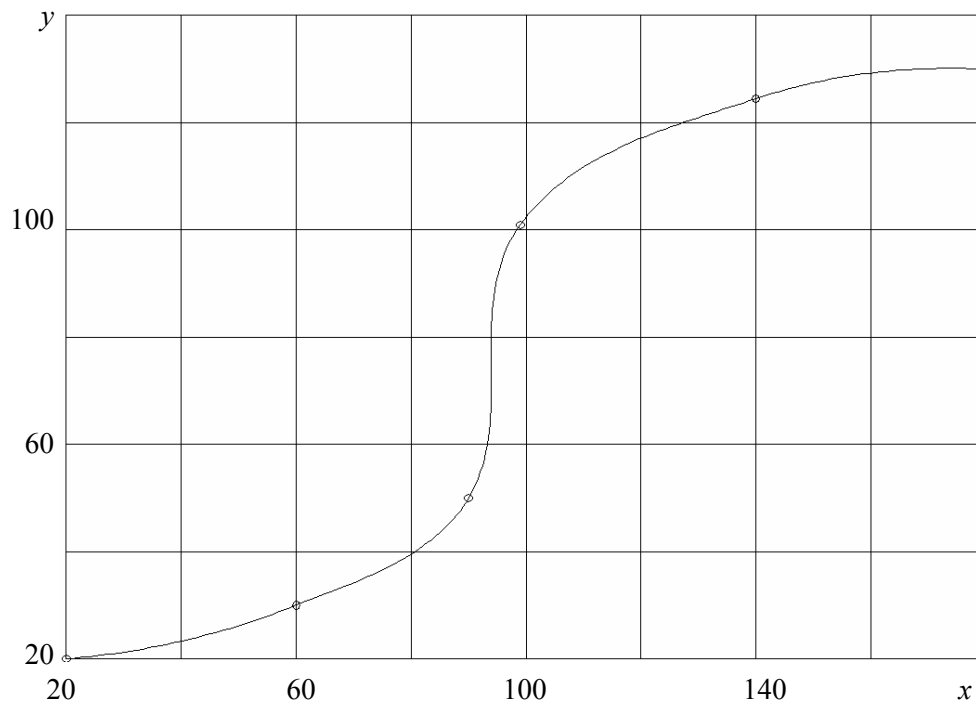


Рис. 3. Інтерполяційна крива першого наближення

Для параметричної кривої, заданої рівняннями (1), кривина може бути визначена залежністю

$$k_i(s) = \frac{x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{2\gamma_i s - \psi_i}{b_i}. \quad (4)$$

Можна легко побачити, що кривина кривої, яка будується за залежностями (1), є лінійною функцією від параметра s . Дійсно, довжина кривої знаходиться за виразом

$$S_i(s) = \int_{-1}^s \sqrt{x'^2 + y'^2} ds = (1+s)b_i. \quad (5)$$

З виразів (4) і (5) випливає, що довжина кривої є лінійною функцією параметра s , і в той же час, кривина збільшується або зменшується пропорційно її довжині.

В табл. 1 наведені значення кривини інтерполяційної кривої вихідного наближення в проміжних опорних точках, які визначені за залежністю (4).

Таблиця 1

Значення кривини в опорних точках

| № точки | $k_i(s=1)$ | $k_{i+1}(s=-1)$ |
|---------|----------------------------|----------------------------|
| 1 | $7,830416 \times 10^{-3}$ | $-6,029317 \times 10^{-3}$ |
| 2 | $4,208951 \times 10^{-2}$ | $4,074901 \times 10^{-2}$ |
| 3 | $-4,412976 \times 10^{-2}$ | $-3,068910 \times 10^{-2}$ |
| 4 | $4,279898 \times 10^{-3}$ | $-1,108483 \times 10^{-3}$ |

Примітка. В табл. 1 пронумеровані тільки проміжні опорні точки. Початкова опорна точка має нульовий номер.

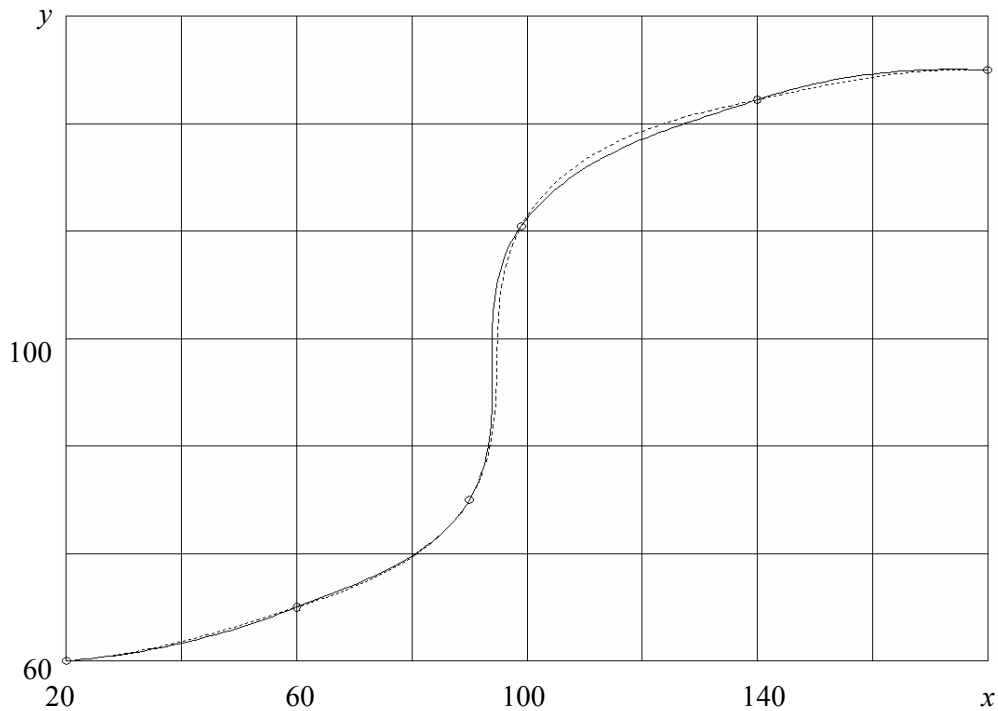


Рис. 4. Результати моделювання інтерполяційної кривої

З аналізу табл. 1 випливає, що у всіх опорних точках кривина ділянки, розташованої ліворуч від опорної точки, не дорівнює кривині ділянки, розташованої праворуч по відношенню до опорної точки. Це означає, що інтерполяційна вихідного наближення фактично є кривою з першим порядком гладкості у вузлових точках, в яких досягається рівність значень функцій та їх похідних, а кривина терпить розрив.

Досягнення рівності кривини зліва і справа від опорних точок реалізуємо шляхом мінімізації функціоналу наступного вигляду

$$f = \sum_{i=1}^n \left(k_{i(s=1)} - k_{i+1(s=-1)} \right)^2, \quad (6)$$

де $n = 4$ (у випадку, що розглядається).

В задачі мінімізації записаного функціоналу за параметри, які варіюються, приймаються кути нахилу дотичних у вузлових точках, з вказаним вище їх першим наближенням.

Для мінімізації функціоналу (6) застосовано вискоєфективний алгоритм, запропонований Хуком-Дживсом [11] і розроблений для мінімізації функції багатьох змінних.

Розв'язання оптимізаційної задачі, пов'язаної з визначенням кутів нахилу дотичних в опорних точках, дозволило вирівняти в цих точках значення кривини, взятих на ділянках зліва і справа від опорних точок (табл. 2).

Таблиця 2

Оптимальні значення кривини в опорних точках

| № точки | $k_i (s = 1)$ | $k_{i+1} (s = -1)$ |
|---------|----------------------------|----------------------------|
| 1 | $1,608085 \times 10^{-3}$ | $1,608085 \times 10^{-3}$ |
| 2 | $3,721636 \times 10^{-2}$ | $3,721636 \times 10^{-2}$ |
| 3 | $-3,549732 \times 10^{-2}$ | $-3,549730 \times 10^{-2}$ |
| 4 | $-7,863768 \times 10^{-5}$ | $-7,863050 \times 10^{-5}$ |

Як впливає з розгляду цієї таблиці, значення кривини у вузлових точках узгоджується з достатньо високим ступенем точності. Це також підтверджують графічні результати, представлені на рис. 4,

на якому для порівняння показані вихідна інтерполяційна крива (суцільна лінія) та крива, побудована з оптимальними значеннями кутів нахилу дотичних в опорних точках (штрихова лінія).

Завдяки моделюванню інтерполяційної кривої з оптимальними значеннями кутів нахилу дотичних в опорних точках характер її проходження суттєво поліпшився.

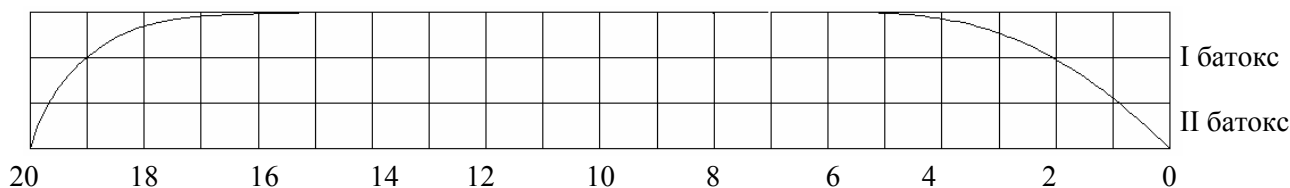


Рис. 5. Фрагмент теоретичного креслення корпусу судна

На рис. 5 з метою підтвердження можливості застосування розробленого методу моделювання інтерполяційної кривої до побудови теоретичного креслення корпусу судна наведено його фрагмент, на якому зображено одну з ватерліній вантажного судна. Сітка креслення формується проекцією діаметральної площини (ДП) на основну площину, дотичну днища корпусу, двома батоксами та двадцятьма одним теоретичним шпангоутом.

Практичною реалізацією доведена можливість моделювання кривих ліній із застосуванням удосконаленого методу визначення лінійних залежностей кривини від довжини дуги. Метод може бути застосованим при моделюванні корабельних кривих. Подальші зусилля в справі моделювання інтерполяційних ліній можуть бути спрямовані на забезпечення застосування законів розподілу кривини більш високих степенів.

Список використаних джерел

1. Анпілогова В. О. Моделювання кривих ліній за допомогою управляючих ламаних, що визначають їх натуральні рівняння [Текст] / В. О. Анпілогова, С. І. Ботвіновська, А. Г. Анпілогов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К. : КДТУБА, 2003. — Вип. 72. — С. 124—129.
2. Борисенко В. Д. Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням лінійного елемента кривини [Текст] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, В. Є. Спіцин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К. : КНУБА, 2006. — Вип. 76. — С. 43—49.
3. Борисенко В. Д. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу за заданою кривиною [Текст] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, В. Є. Спіцин // Геометричне та комп'ютерне моделювання. — Харків : ХДУХТ, 2004. — Вип. 5. — С. 30—34.
4. Борисенко В. Д. Моделювання складених кривих із застосуванням лінійних законів розподілу їх кривини [Текст] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, І. В. Устенко // Наукові праці: Науково-методичний журнал. — Вип. 254. Т. 266. Комп'ютерні технології. — Миколаїв : Видавництво ЧДУ ім. Петра Могили, 2015. — С. 6—10.
5. Борисенко В. Д. Моделювання плоских кривих у натуральній параметризації [Електронний ресурс] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко // Розвиток інформаційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук: Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Миколаїв, 22–24 вересня 2016 р.). — Миколаїв : МНУ імені В. О. Сухомлинського, 2016. — С. 110—113.
6. Захарова Т. М. Конструювання плоских і просторових кривих у функції натурального параметра [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 Прикладна геометрія, інженерна графіка / Тетяна Миколаївна Захарова; КНУБА — К., 2014. — 24 с.
7. Ковалев В. А. Новые методы автоматизации проектирования судовой поверхности [Текст] / В. А. Ковалев. — Л. : Судостроение, 1982. — 212 с.
8. Пилипака С. Ф. Графо-аналитический метод приближенного построения кривой по заданному натуральному уравнению [Текст] / С. Ф. Пилипака // Прикладная геометрия и инженерная графика. — К. : Будівельник, 1989. — Вип. 48. — С. 44—45.
9. Устенко С. А. Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 Прикладна геометрія, інженерна графіка / Сергій Анатолійович Устенко; КНУБА. — К., 2013. — 40 с.
10. Adams J. A. The intrinsic method for curve definition [Text] / J. A. Adams // Computer Aided Design. — 1975. — Vol. 7, No 4. — P. 243—249.
11. Hooke R. Direct search solution of numerical and statistical problems [Text] / R. Hooke, T. A. Jeeves // Journal of the ACM. — 1961. — Vol. 8, No 2. — P. 212—229.

Валерий БОРИСЕНКО, Ирина УСТЕНКО
г. Николаев

COMPUTER SIMULATION OF PLANE CURVES IN RESPECT OF THEORETICAL DRAWING OF THE SHIP'S HULL

A new approach to modeling of planar curves with linear curvature distribution in dependence of the arc length is discussed. The simulated curve is given in tabular form. At the start and end points of curve the angles of tangents are specified. A computer code of calculation and visualization of the results on a PC was developed.

Key words: plane curve, computer simulation, the linear dependence of the curvature distribution, arc length.

Valerii BORYSENKO, Iryna USTENKO
Mykolaiv

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ ЧЕРТЕЖУ КОРПУСА СУДНА

В статье рассматривается новый подход к моделированию плоских кривых с применением линейной зависимости распределения кривизны от длины дуги. Моделируемая кривая задается в табличной форме. В начальной и конечной точках кривой заданы углы наклона касательных. Разработана программа расчетов и визуализации полученных результатов на ПЭВМ.

Ключевые слова: плоская кривая, компьютерное моделирование, линейная зависимость распределения кривизны, длина дуги.

Стаття надійшла до редколегії 05.10.2016