

АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГИХ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК У ПОСТАНОВЦІ МІНДЛІНА МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛОКАЦІЇ

У статті розглядаються вільні коливання симетричних шаруватих пологих двоопуклих оболонок змінної товщини з прямокутним планом. Рівняння руху оболонки виведені в рамках уточненої теорії першого порядку. Отримана двовимірною системою диференціальних рівнянь відносно переміщень і кутів повороту, зведена до одновимірної методом сплайн-апроксимації з використанням В-сплайнів третього порядку. Застосувавши метод колокації, отримана задача на власні значення з відповідними крайовими умовами. Розв'язувальна система з різними граничними умовами, з якої можна отримати значення власних частот і відповідних їм форм коливань, представлена у векторно-матричній формі.

Ключові слова: вільні коливання, шарувата полога оболонка, метод сплайн-колокації, теорія Міндліна.

Шаруваті оболонки широко використовуються в багатьох галузях сучасної техніки, будівництва, судно-, літако-, ракето- будівництва та ін. У процесі експлуатації такі системи потрапляють під вплив різних динамічних навантажень, які можуть викликати небезпечні коливання як елементів, так і всієї конструкції. Щоб оптимально спроектувати оболонкову конструкцію для роботи під дією певних статичних і динамічних навантажень, треба визначити умови міцності і надійності. Для аналізу міцності і несучої здатності шаруватих оболонок необхідно перш за все знати фактори напружено-деформованого стану, а також швидкість їх зміни у часі. Таким чином, є необхідність розробки оптимальних і достатньо точних підходів до математичного, геометричного і комп'ютерного моделювання динамічних задач теорії шаруватих оболонок з їх послідовним розв'язанням не менш точними й ефективними методами.

Розвиток, аналіз і класифікація багатьох існуючих уточнених теорій багатошарових пластин і оболонок наведені в огляді [1]. Аналіз підходів до моделювання сендвічевих пластин наведений у сучасних оглядових статтях [6, 10]. Огляди, присвячені задачам динаміки шаруватих пластин і оболонок, розглянуті в [5, 7]. Багато важливих питань розробки, аналізу та побудови тришарових пластин і пологих оболонок у тому числі і з композитних матеріалів повністю обговорені в монографії [12]. Я. М. Григоренко з колегами в роботах [2, 3, 4] узагальнив досягнення в теорії пластин і оболонок.

Результати досліджень проблем шаруватих оболонок, а також велика кількість розв'язаних конкретних задач узагальнені в сучасних монографіях: М. С. Кату [8] описав динамічну поведінку шаруватих пластин і пологих оболонок; В. Соєдел [11] вивчив динаміку пластин і оболонок із композитів; Дж. Н. Редді [9] зосередився на аналізі напружень і загальній механіці композитних пластин і оболонок.

Основна ціль роботи полягає у виведенні розв'язувальної системи рівнянь для задачі про вільні коливання шаруватих пологих оболонок і застосуванні до неї методу сплайн-колокації.

Об'єктом дослідження є не тонкі ($1/10 \leq h/a < 1/5$) симетричні, щодо серединної поверхні, шаруваті пологі оболонки змінної товщини з прямокутним планом і не нульовою Гуссовою кривизною. Вважається, що головні напрямки пружності кожного шару співпадають з координатними лініями. А в якості вихідних для кожного шару оболонки використовуються основні припущення теорії пружності неоднорідного ортотропного тіла:

- у межах кожного шару передбачається справедливою гіпотеза суцільності;
- приймаються умови ідеального контакту шарів, пов'язані з відсутністю їх відриву і взаємного проковзування по поверхні контакту;
- матеріал кожного шару вважається ортотропним, лінійно-пружним і підпорядковується узагальненому закону Гука;

Для пакету шарів у цілому передбачається справедливою теорія типу Міндіна-Тимошенка, згідно з якою приймаються такі гіпотези:

- прямої лінії (кінематична): прямолінійний елемент нормалі до вихідної координатної поверхні при малих деформаціях зберігає свою довжину і прямолінійність, але не залишається перпендикулярним до деформованої координатної поверхні;
- статична: нормальними напруженнями на майданчиках, паралельних координатній поверхні, можна знехтувати в порівнянні з аналогічними напруженнями на майданчиках, перпендикулярних їй.

Також враховуються сили інерції, пов'язані зі зміщенням елемента координатної поверхні й обертанням елемента нормалі. У даній роботі коефіцієнт пружної основи типу Вінклера $K_p = 0$.

Загальні рівняння теорії оболонок можна використовувати безпосередньо при розгляді вільних коливань пологих оболонок. Однак, застосування деяких додаткових припущень призводить до зниження складності розв'язувальної системи рівнянь:

1. Оболонка проектується на площину, яка проходить через вершини її контуру, у вигляді прямокутника зі сторонами a і b . Стріла підйому оболонки над цією поверхнею $f \leq 1/5l$, де l – найменший характерний розмір на серединній поверхні. Отже, замість криволінійної використовується ортогональна система координат, а геометрія близька до геометрії пластини (параметри Ламе $A = B = 1$). Стріла підйому виражається так:

$$f = f_x + f_y, \quad f_x = R_x - \sqrt{R_x^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad f_y = R_y - \sqrt{R_y^2 - \frac{b^2}{4}},$$

де R_x, R_y – радіуси кривизни.

Зміни кривизни, викликані компонентами u, v , малі в порівнянні зі змінами, викликаними складовою w . Можна вважати

$$\frac{u_i}{R_i} \ll 1; \quad Q_i \ll R_i \frac{\partial N_i}{\partial i}; \quad 1 + \frac{z}{R_i} \approx 1,$$

де u_i – тангенціальні компоненти переміщення u або v ; Q_i – поперечні сили Q_x або Q_y ; N_i – навантаження N_x, N_y або N_{xy} ; R_i – радіуси кривизни R_x, R_y або R_{xy} . Вираз (∂i) позначає похідну по x або y .

Значимо, що в залежності від знаку Гауссової кривизни, пологі оболонки поділяють (рис. 1) на сферичні ($k > 0$), циліндричні ($k = 0$) та гіперболічно параболічні ($k < 0$).

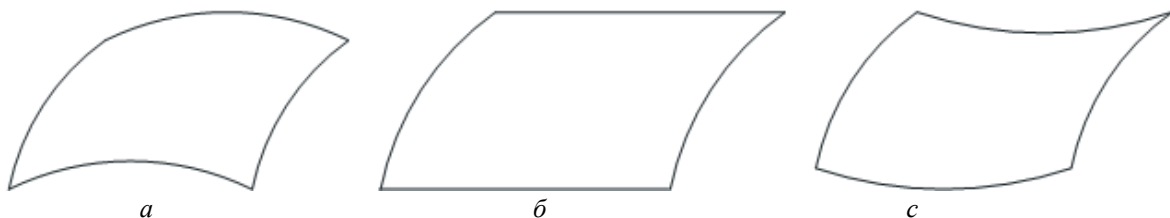


Рис. 1. Сферичні (а), циліндричні (б) та гіперболічно параболічні (с) пологі оболонки

Прийняті гіпотези дозволяють замість тривимірної задачі динаміки оболонки як просторового тіла розглядати двовимірну задачу коливання її координатної поверхні, а припущення щодо геометрії дозволяють записати характеристики в ортогональних координатах. Замість $u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, t)$, $u_\beta(\alpha, \beta, \gamma, t)$, $u_\gamma(\alpha, \beta, \gamma, t)$ розглядаються переміщення $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$. Компоненти деформації тривимірного тіла $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_{\alpha\beta}, e_{\alpha\gamma}, e_{\beta\gamma}$ замінюються тангенціальними $\varepsilon_x, \varepsilon_y,$

ε_{xy} і згинальними χ_x , χ_y , $2\chi_{xy}$. Напружений стан описується зведеними до координатної поверхні тангенціальними N_x , N_y , N_{xy} , N_{yx} і перерізуючими Q_x , Q_y зусиллями та згинаючими M_x , M_y і скручуючими M_{xy} , M_{yx} моментами які є інтегральними характеристиками напружень σ_α , σ_β , σ_γ , $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$, статично їм еквівалентними.

Слід зазначити, що реальний розподіл деформацій поперечного зсуву і відповідних напружень – параболічний по товщині не тонкої оболонки. Більше того, прийнята кінематична гіпотеза не задовольняє умову зникнення дотичних напружень на верхній і нижній поверхнях об'єкту дослідження. Тому повстає необхідність увести коефіцієнт корекції зсуву. Коефіцієнт визначається з умов узгодження двох прийнятих незалежно друг від друга припущень щодо характеру розподілу переміщень і дотичних напружень по товщині оболонки. Існує багато підходів для його визначення, наприклад, метод Купера, метод Стефена-Хаткінса, енергетичний підхід; але в більшості випадків для шаруватих пластин і пологих оболонок використовують значення $5/6$ – модель Рейсснера або $\pi^2/12$ – модель Міндліна. У даній роботі коефіцієнт корекції зсуву приймається рівним $5/6$.

Наведемо основні співвідношення вільних коливань оболонок вище зазначеного типу.

– Зв'язок кінематичних і деформаційних факторів з відповідними факторами тривимірної теорії пружності

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\psi_x, & u_y(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\psi_y, \\ u_z(x, y, z, t) &= w(x, y, t); & e_x(x, y, z, t) &\approx \varepsilon_x(x, y, t) + \gamma\chi_x(x, y, t), \\ e_y(x, y, z, t) &\approx \varepsilon_y(x, y, t) + \gamma\chi_y(x, y, t), & e_{xy}(x, y, z, t) &\approx \varepsilon_{xy}(x, y, t) + 2\gamma\chi_{xy}(x, y, t), \\ e_{xz}(x, y, z, t) &\approx \gamma_x(x, y, t), & e_{yz}(x, y, z, t) &\approx \gamma_y(x, y, t). \end{aligned}$$

– Зв'язок між деформаціями координатної поверхні і переміщеннями її точок

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w, & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \chi_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - k_1^2 w, & \chi_y &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - k_2^2 w, & 2\chi_{xy} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \\ \gamma_x &= \psi_x - \vartheta_x, & \vartheta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u, & \gamma_y &= \psi_y - \vartheta_y, & \vartheta_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 v. \end{aligned} \quad (1)$$

У виразах (1) k_1 , k_2 – кривизни; ψ_x , ψ_y – кути повороту нормалі без врахування поперечних зсувів; γ_x , γ_y – кути повороту нормалі, обумовлені поперечними зсувами.

– Рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y &= I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= I_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, & N_{xy} - k_2 M_{yx} - N_{yx} + k_1 M_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$I_0 = \sum_i^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} \rho^i dz; \quad I_2 = \sum_i^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} \rho^i z^2 dz;$$

I_2 – момент інерції обертання нормального елемента відносно осей x , y з урахуванням шаруватої структури оболонки і змінної товщини шарів, що її складають; M – кількість шарів; $\rho^i = \rho^i(x, y, z)$ – густина; $z = z_{i-1}(x, y)$, $z = z_i(x, y)$ – рівняння обмежуючих поверхонь.

– Співвідношення пружності

$$\begin{aligned} N_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y, & N_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y, \\ N_{xy} &= C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_2D_{66}\chi_{xy}, & N_{yx} &= C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_1D_{66}\chi_{xy}, \\ M_x &= D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y, & M_y &= D_{12}\chi_x + D_{22}\chi_y, \\ M_{xy} &= M_{yx} = 2D_{66}\chi_{xy}, & Q_x &= K_1\gamma_x, \quad Q_y = K_2\gamma_y, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_x^i}{1-\nu_x^i\nu_y^i} dz, & C_{12} &= \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\nu_y^i E_x^i}{1-\nu_x^i\nu_y^i} dz, \\ C_{22} &= \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_y^i}{1-\nu_x^i\nu_y^i} dz, & C_{66} &= \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} G_{xy}^i dz, \\ D_{11} &= \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_x^i}{1-\nu_x^i\nu_y^i} z^2 dz, & D_{12} &= \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\nu_y^i E_x^i}{1-\nu_x^i\nu_y^i} z^2 dz, \\ D_{22} &= \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_y^i}{1-\nu_x^i\nu_y^i} z^2 dz, & D_{66} &= \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} G_{xy}^i z^2 dz, \\ K_1 &= \frac{5}{6} \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} G_{xz}^i dz, & K_2 &= \frac{5}{6} \sum_{i=1}^M \int_{z_{i-1}}^{z_i} G_{yz}^i dz. \end{aligned} \quad (4)$$

У формулах (4) E_x^i , E_y^i , ν_x^i , ν_y^i – модулі пружності і коефіцієнти Пуассона в напрямках x і y ; G_{yz}^i , G_{xz}^i , G_{xy}^i – модулі зсуву шарів оболонки в площинах, паралельних координатним поверхням $x = \text{const}$; $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ відповідно.

Розглядатимемо на сторонах $x = 0$, $x = a$ такі граничні умови:

1) контур жорстко закріплений:

$$u = v = w = 0, \quad \Psi_x = \Psi_y = 0; \quad (5)$$

2) контур шарнірно опертий:

$$N_x = 0, \quad v = w = 0, \quad M_x = 0, \quad \Psi_y = 0; \quad (6)$$

3) контур вільний:

$$N_x = 0, \quad N_{xy} = 0, \quad Q_x = 0, \quad M_x = 0, \quad M_{xy} = 0. \quad (7)$$

Аналогічні умови можна отримати на сторонах $y = 0$, $y = b$ зробивши заміни $x \rightarrow y$, $u \rightarrow v$, $\Psi_x \rightarrow \Psi_y$.

Замість початкових умов припускається, що всі точки пружного тіла здійснюють коливання з однаковою частотою, так що досліджуваний процес характеризується сукупністю гармонійних складових вигляду

$$\bar{N}(x, y, t) = \bar{F}(x, y) e^{i\omega t},$$

$$\bar{N}(X, Y, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w(x, y, t) \\ \Psi_x(x, y, t) \\ \Psi_y(x, y, t) \end{pmatrix}; \quad \bar{F}(x, y) = \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \\ W(x, y) \\ \Psi_x(x, y) \\ \Psi_y(x, y) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де ω – частота вільних коливань; компоненти вектора $\bar{F}(x, y)$ характеризують відповідну до частоти форму вільних коливань.

Для уповільнення накоплення похибки при розв'язанні задачі чисельними методами на ПК необхідно обезрозмірити рівняння системи зробивши заміну:

$$x = aX, \quad y = bY, \quad (9)$$

де a і b – лінійні розміри оболонки.

Підставивши вирази (3) у рівняння рівноваги (2) з урахуванням (1), (8) і (9), отримаємо систему рівнянь відносно функцій u , v , w , Ψ_x , Ψ_y .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} &= a_{11} \frac{\partial U}{\partial X} + a_{12} \frac{\partial U}{\partial Y} + a_{13} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + a_{14} \frac{\partial V}{\partial X} + a_{15} \frac{\partial V}{\partial Y} + a_{16} \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + \\ &+ a_{17} W + a_{18} \frac{\partial W}{\partial X} + a_{1,9} \frac{\partial \Psi_x}{\partial Y} + a_{1,10} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Y^2} + a_{1,11} \frac{\partial \Psi_y}{\partial X} + a_{1,12} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial X \partial Y}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} &= a_{21} \frac{\partial U}{\partial X} + a_{22} \frac{\partial U}{\partial Y} + a_{23} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + a_{24} V + a_{25} \frac{\partial V}{\partial X} + a_{26} \frac{\partial V}{\partial Y} + a_{27} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \\ &+ a_{28} W + a_{29} \frac{\partial W}{\partial Y} + a_{2,10} \frac{\partial \Psi_x}{\partial X} + a_{2,11} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial X \partial Y} + a_{2,12} \Psi_y + a_{2,13} \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y} + a_{2,14} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} &= a_{31} U + a_{32} \frac{\partial U}{\partial X} + a_{33} V + a_{34} \frac{\partial V}{\partial Y} + a_{35} W + a_{36} \frac{\partial W}{\partial X} + a_{37} \frac{\partial W}{\partial Y} + \\ &+ a_{38} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + a_{39} \Psi_x + a_{3,10} \frac{\partial \Psi_x}{\partial X} + a_{3,11} \Psi_y + a_{3,12} \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y}, \\ \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial X^2} &= a_{41} U + a_{42} W + a_{43} \frac{\partial W}{\partial X} + a_{44} \Psi_x + a_{45} \frac{\partial \Psi_x}{\partial X} + a_{46} \frac{\partial \Psi_x}{\partial Y} + \\ &+ a_{47} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Y^2} + a_{48} \frac{\partial \Psi_y}{\partial X} + a_{49} \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y} + a_{4,10} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial X \partial Y}, \\ \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial X^2} &= a_{51} V + a_{52} W + a_{53} \frac{\partial W}{\partial Y} + a_{54} \frac{\partial \Psi_x}{\partial X} + a_{55} \frac{\partial \Psi_x}{\partial Y} + a_{56} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial X \partial Y} + \\ &+ a_{57} \Psi_y + a_{58} \frac{\partial \Psi_y}{\partial X} + a_{59} \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y} + a_{5,10} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial Y^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Коефіцієнти $a_{ij} = a_{ij}(X, Y)$ системи (10) мають такі значення:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1}{C_{11}} \frac{\partial C_{11}}{\partial X}, & a_{12} &= -\frac{a^2}{b^2 C_{11}} \frac{\partial C_{66}}{\partial Y}, & a_{13} &= -\frac{a^2 C_{66}}{b^2 C_{11}}, & a_{14} &= -\frac{a}{b C_{11}} \frac{\partial C_{66}}{\partial Y}, \\
a_{15} &= -\frac{a}{b C_{11}} \frac{\partial C_{12}}{\partial X}, & a_{16} &= -\frac{a}{b C_{11}} (C_{12} + C_{66}), & a_{17} &= -\frac{a}{C_{11}} \left(k_1 \frac{\partial C_{11}}{\partial X} + k_2 \frac{\partial C_{12}}{\partial X} \right), \\
a_{18} &= -\frac{a}{C_{11}} (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}), & a_{1,9} &= -\frac{a^2 k_1}{b^2 C_{11}} \frac{\partial D_{66}}{\partial Y}, & a_{1,10} &= -\frac{a^2 k_1 D_{66}}{b^2 C_{11}}, & a_{1,11} &= -\frac{a k_1}{b C_{11}} \frac{\partial D_{66}}{\partial Y}, \\
a_{1,12} &= -\frac{a k_1 D_{66}}{b C_{11}}, & a_{21} &= -\frac{a}{b C_{66}} \frac{\partial C_{12}}{\partial Y}, & a_{22} &= -\frac{a}{b C_{66}} \frac{\partial C_{66}}{\partial X}, & a_{23} &= -\frac{a}{b C_{66}} (C_{12} + C_{66}), \\
a_{24} &= \frac{a^2 k_2^2 K_2}{C_{66}}, & a_{25} &= -\frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{66}}{\partial X}, & a_{26} &= -\frac{a^2}{b^2 C_{66}} \frac{\partial C_{22}}{\partial Y}, & a_{27} &= -\frac{a^2 C_{22}}{b^2 C_{66}}, \\
a_{28} &= -\frac{a^2}{b C_{66}} \left(k_1^2 k_2 \frac{\partial D_{12}}{\partial Y} + k_2^3 \frac{\partial D_{22}}{\partial Y} + k_1 \frac{\partial C_{12}}{\partial Y} + k_2 \frac{\partial C_{22}}{\partial Y} \right), \\
a_{29} &= -\frac{a^2}{b C_{66}} \left(k_1^2 k_2 D_{12} + k_2^3 D_{22} + k_2 K_2 + k_1 C_{12} + k_2 C_{22} \right), & a_{2,10} &= \frac{a k_2}{b C_{66}} \frac{\partial D_{12}}{\partial Y}, \\
a_{2,11} &= \frac{a k_2 D_{12}}{b C_{66}}, & a_{2,12} &= -\frac{a^2 k_2 K_2}{C_{66}} + \frac{a^2 \omega^2 k_2 I_2}{C_{66}}, & a_{2,13} &= \frac{a^2 k_2}{b^2 C_{66}} \frac{\partial D_{22}}{\partial Y}, & a_{2,14} &= \frac{a^2 k_2 D_{22}}{b^2 C_{66}}, \\
a_{31} &= \frac{a k_1}{K_1} \frac{\partial K_1}{\partial X}, & a_{32} &= \frac{a}{K_1} (k_1 K_1 + k_1 C_{11} + k_2 C_{12}), & a_{33} &= \frac{a^2 k_2}{b K_1} \frac{\partial K_2}{\partial Y}, \\
a_{34} &= \frac{a^2}{b K_1} (k_2 K_2 + k_1 C_{12} + k_2 C_{22}), & a_{35} &= \frac{a^2}{K_1} (k_1^2 C_{11} + 2k_1 k_2 C_{12} + k_2^2 C_{22}) - \frac{a^2 \omega^2 I_0}{K_1}, \\
a_{36} &= -\frac{1}{K_1} \frac{\partial K_1}{\partial X}, & a_{37} &= -\frac{a^2}{b^2 K_1} \frac{\partial K_2}{\partial Y}, & a_{38} &= -\frac{a^2 K_2}{b^2 K_1}, & a_{39} &= -\frac{a}{K_1} \frac{\partial K_1}{\partial X}, & a_{3,10} &= -a, \\
a_{3,11} &= -\frac{a^2}{b K_1} \frac{\partial K_2}{\partial Y}, & a_{3,12} &= -\frac{a^2 K_2}{b K_1}, & a_{41} &= -\frac{a^2 k_1 K_1}{D_{11}}, & a_{42} &= \frac{a}{D_{11}} \left(k_1^2 \frac{\partial D_{11}}{\partial X} + k_2^2 \frac{\partial D_{12}}{\partial X} \right), \\
a_{43} &= \frac{a}{D_{11}} (k_1^2 D_{11} + k_2^2 D_{12} + K_1), & a_{44} &= \frac{a^2 K_1}{D_{11}} - \frac{a^2 \omega^2 I_2}{D_{11}}, & a_{45} &= -\frac{1}{D_{11}} \frac{\partial D_{11}}{\partial X}, \\
a_{46} &= -\frac{a^2}{b^2 D_{11}} \frac{\partial D_{66}}{\partial Y}, & a_{47} &= -\frac{a^2 D_{66}}{b^2 D_{11}}, & a_{48} &= -\frac{a}{b D_{11}} \frac{\partial D_{66}}{\partial Y}, & a_{49} &= -\frac{a}{b D_{11}} \frac{\partial D_{12}}{\partial X}, \\
a_{4,10} &= -\frac{a}{b D_{11}} (D_{12} + D_{66}), & a_{51} &= -\frac{a^2 k_2 K_2}{D_{66}}, \\
a_{52} &= \frac{a^2}{b D_{66}} \left(k_1^2 \frac{\partial D_{12}}{\partial Y} + k_2^2 \frac{\partial D_{22}}{\partial Y} \right), & a_{53} &= \frac{a^2}{b D_{66}} (k_1^2 D_{12} + k_2^2 D_{22} + K_2), \\
a_{54} &= -\frac{a}{b D_{66}} \frac{\partial D_{12}}{\partial Y}, & a_{55} &= -\frac{a}{b D_{66}} \frac{\partial D_{66}}{\partial X}, & a_{56} &= -\frac{a}{b D_{66}} (D_{12} + D_{66}), \\
a_{57} &= \frac{a^2 K_2}{D_{66}} - \frac{a^2 \omega^2 I_2}{D_{66}}, & a_{58} &= -\frac{1}{D_{66}} \frac{\partial D_{66}}{\partial X}, & a_{59} &= -\frac{a^2}{b^2 D_{66}} \frac{\partial D_{22}}{\partial Y}, & a_{5,10} &= -\frac{a^2 D_{22}}{b^2 D_{66}}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Граничні умови (5)–(7) з урахуванням заміни (8), (9) на сторонах $X = 0$, $X = 1$ мають такий вигляд:

1) контур жорстко закріплений:

$$U = V = W = 0, \quad \Psi_X = \Psi_Y = 0; \quad (12)$$

2) контур шарнірно опертий:

$$N_X = 0, \quad V = W = 0, \quad M_X = 0, \quad \Psi_Y = 0 \quad (13)$$

або

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad V = W = 0, \quad \frac{\partial \Psi_X}{\partial X} = 0, \quad \Psi_Y = 0;$$

3) контур вільний:

$$\begin{aligned} N_X = 0, \quad N_{XY} = 0, \\ Q_X = 0, \quad M_X = 0, \quad M_{XY} = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

або

$$\begin{aligned} C_{11} \left(\frac{\partial U}{a \partial X} + k_1 W \right) + C_{12} \left(\frac{\partial V}{b \partial Y} + k_2 W \right) &= 0, \\ C_{66} \left(\frac{\partial U}{b \partial Y} + \frac{\partial V}{a \partial X} \right) + k_2 D_{66} \left(\frac{\partial \Psi_X}{b \partial Y} + \frac{\partial \Psi_Y}{a \partial X} \right) &= 0, \\ \Psi_X + \frac{\partial W}{a \partial X} - k_1 U &= 0, \\ D_{11} \left(\frac{\partial \Psi_X}{a \partial X} - k_1^2 W \right) + D_{12} \left(\frac{\partial \Psi_Y}{b \partial Y} - k_2^2 W \right) &= 0, \\ \frac{\partial \Psi_X}{b \partial Y} + \frac{\partial \Psi_Y}{a \partial X} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогічні умови можна отримати на сторонах $Y = 0$, $Y = 1$ зробивши заміни $X \rightarrow Y$, $U \rightarrow V$, $\Psi_X \rightarrow \Psi_Y$.

Отже, система (10) з коефіцієнтами (11) і крайовими умовами (12)–(14) описує вільні коливання симетричних щодо серединної поверхні шаруватих пологих оболонок змінної товщини з прямокутним планом і не нульовою Гуссовою кривизною, виготовлених з ортотропного матеріалу в рамках теорії Мінділіна-Тимошенка. Отримані вирази можна звести до системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами шляхом сплай-апроксимації вздовж одного з координатних напрямків. Зазначимо, що в (10) не входять похідні від шуканих функцій по координаті Y вище другого порядку, тому можна обмежитися застосуванням В-сплайнів третього порядку.

Представимо шукані функції наступним чином:

$$\begin{aligned} U(X, Y) &= \sum_{i=0}^N u_i(X) \phi_{1i}(Y), \quad V(X, Y) = \sum_{i=0}^N v_i(X) \phi_{2i}(Y), \\ W(X, Y) &= \sum_{i=0}^N w_i(X) \phi_{3i}(Y), \quad \Psi_X(X, Y) = \sum_{i=0}^N \psi_{Xi}(X) \phi_{4i}(Y), \\ \Psi_Y(X, Y) &= \sum_{i=0}^N \psi_{Yi}(X) \phi_{5i}(Y), \end{aligned}$$

де $u_i(X)$, $v_i(X)$, $w_i(X)$, $\psi_{X_i}(X)$, $\psi_{Y_i}(X)$ – шукані функції змінної X ; $\varphi_{ji}(Y)$ ($j = \overline{1,5}$) – лінійні комбінації В-сплайнів третього степеня на рівномірній сітці $\Delta: 0 = Y_0 < Y_1 < \dots < Y_N = 1$, які задовольняють граничні умови на контурах $Y = 0$ і $Y = 1$. Функції $\varphi_{ji}(Y)$ мають наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{j0}(Y) = \alpha_{11}^j B_3^{-1}(Y) + \alpha_{12}^j B_3^0(Y) + \alpha_{13}^j B_3^1(Y); \\ \varphi_{j1}(Y) = \alpha_{21}^j B_3^{-1}(Y) + \alpha_{22}^j B_3^0(Y) + \alpha_{23}^j B_3^1(Y); \\ \varphi_{ji}(Y) = B_3^i(Y), \quad i = \overline{2, N-2}; \\ \varphi_{jN-1}(Y) = \beta_{21}^j B_3^{N-1}(Y) + \beta_{22}^j B_3^N(Y) + \beta_{23}^j B_3^{N+1}(Y); \\ \varphi_{jN}(Y) = \beta_{11}^j B_3^{N-1}(Y) + \beta_{12}^j B_3^N(Y) + \beta_{13}^j B_3^{N+1}(Y); \end{array} \right. \quad j = \overline{1,5}.$$

Параметри α_{pq}^j , β_{pq}^j ($p = 1, 2$; $q = 1, 2, 3$) визначаються в залежності від типу граничних умов на контурах $Y = 0$, $Y = 1$.

Вимагатимемо задоволення рівнянь у заданих оптимальних точках колокації ξ_k , $k = \overline{0, N}$. Під оптимальними мають на увазі такі вузли колокації на сітці $\Delta: 0 = Y_0 < Y_1 < \dots < Y_N = 1$, ($Y_k = kh$, $h = 1/N$, $k = \overline{0, N}$), які задовольняють умови

$$\begin{aligned} \xi_{2i} &\in [x_{2i}, x_{2i+1}]; \quad \xi_{2i+1} \in [x_{2i}, x_{2i+1}]; \\ \xi_{2i} &= x_{2i} + t_1 h; \quad \xi_{2i+1} = x_{2i} + t_2 h \quad (i = \overline{0, s}), \end{aligned}$$

причому $N = 2s + 1$ ($s \geq 3$), а точки t_1 і t_2 є коренями полінома Лежандра другого степеня $P_2(t) = 6t^2 - 6t + 1$:

$$t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad t_2 = 1 - t_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Таким чином, на кожному проміжку $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ є два вузли колокації, а на сусідніх інтервалах $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ та $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$ вони відсутні.

Виконавши всі перетворення, зведемо отриману систему до векторно-матричного вигляду. Для цього позначимо

$$\Phi_{j\alpha}(\xi) = [\varphi_{ji}^{(\alpha)}(\xi_k)] = \begin{pmatrix} \varphi_{j0}^{(\alpha)}(\xi_0) & \varphi_{j1}^{(\alpha)}(\xi_0) & \dots & \varphi_{jN}^{(\alpha)}(\xi_0) \\ \varphi_{j0}^{(\alpha)}(\xi_1) & \varphi_{j1}^{(\alpha)}(\xi_1) & \dots & \varphi_{jN}^{(\alpha)}(\xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{j0}^{(\alpha)}(\xi_N) & \varphi_{j1}^{(\alpha)}(\xi_N) & \dots & \varphi_{jN}^{(\alpha)}(\xi_N) \end{pmatrix};$$

$$\bar{u}(X) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad \bar{v}(X) = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \quad \bar{w}(X) = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_X(X) = \begin{pmatrix} \psi_{X0} \\ \psi_{X1} \\ \vdots \\ \psi_{XN} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_Y(X) = \begin{pmatrix} \psi_{Y0} \\ \psi_{Y1} \\ \vdots \\ \psi_{YN} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
u'_i(X) &= \tilde{u}_i(X), & v'_i(X) &= \tilde{v}_i(X), \\
w'_i(X) &= \tilde{w}_i(X), \\
\Psi'_{Xi}(X) &= \tilde{\Psi}_{Xi}(X), & \Psi'_{Yi}(X) &= \tilde{\Psi}_{Yi}(X);
\end{aligned}$$

$$\bar{u}(X) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{pmatrix}; \quad \bar{v}(X) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_0 \\ \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_N \end{pmatrix}; \quad \bar{w}(X) = \begin{pmatrix} \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_N \end{pmatrix};$$

$$\bar{\Psi}_X(X) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{X0} \\ \tilde{\Psi}_{X1} \\ \vdots \\ \tilde{\Psi}_{XN} \end{pmatrix}; \quad \bar{\Psi}_Y(X) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{Y0} \\ \tilde{\Psi}_{Y1} \\ \vdots \\ \tilde{\Psi}_{YN} \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо

$$\frac{d\bar{R}}{dX} = A\bar{R}, \tag{15}$$

де $\bar{R} = \bar{R}(X) = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w} \ \bar{\Psi}_X \ \bar{\Psi}_Y]^T$ – вектор-стовпець розмірності $10(N+1)$;
 $A = A(X, \xi, \lambda)$ – квадратна матриця розмірності $10(N+1)$, $\xi = \xi_k$ ($k = \overline{0, N}$) – вузли колокації,
 $\lambda = \omega^2$ – параметр системи.

Граничні умови в загальному вигляді:

$$\begin{aligned}
B_1 \bar{R}(0) &= \bar{0}, \\
B_2 \bar{R}(1) &= \bar{0},
\end{aligned} \tag{16}$$

де B_1, B_2 – матриці розмірності $10(N+1) \times 5(N+1)$.

1) контур жорстко закріплений:

$$B_l = \begin{pmatrix} \Phi_{10} & O & O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & \Phi_{20} & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \Phi_{30} & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \Phi_{40} & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O & \Phi_{50} & O \end{pmatrix}, \quad l=1,2;$$

2) контур шарнірно опертий:

$$B_l = \begin{pmatrix} O & \Phi_{10} & O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & \Phi_{20} & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \Phi_{30} & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \Phi_{40} & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O & \Phi_{50} & O \end{pmatrix}, \quad l=1,2;$$

3) контур вільний:

$$B_l = \begin{pmatrix} O & C_{11} \frac{1}{a} \Phi_{10} & C_{12} \frac{1}{b} \Phi_{21} & O & (C_{11}k_1 + C_{12}k_2)\Phi_{30} & O \\ C_{66} \frac{1}{b} \Phi_{11} & O & O & C_{66} \frac{1}{a} \Phi_{20} & O & O \\ -k_1 \Phi_{10} & O & O & O & O & \frac{1}{a} \Phi_{30} \\ O & O & O & O & -(D_{11}k_1^2 + D_{12}k_2^2)\Phi_{30} & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ k_2 D_{66} \frac{1}{b} \Phi_{41} & O & O & O & \frac{1}{a} \Phi_{50} & O \\ \Phi_{40} & O & O & O & O & O \\ O & D_{11} \frac{1}{a} \Phi_{40} & D_{12} \frac{1}{b} \Phi_{51} & O & O & O \\ \frac{1}{b} \Phi_{41} & O & O & O & \frac{1}{a} \Phi_{50} & O \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2;$$

Отже, отримана система (15) з крайовими умовами (16) описує вільні коливання симетричних шаруватих двоопуклих пологих оболонок змінної товщини з прямокутним планом виготовлених з ортотропного матеріалу в рамках теорії Міндіна-Тимошенка і може бути ефективно розв'язана стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Аналізуючи результати, можна прийти до висновку, що метод сплайн-колокації виділяється серед інших проєкційних методів винятковою простотою чисельної реалізації. Він полягає в знаходженні сплайна, який задовольняє крайові умови, а також диференціальних рівнянь у достатній кількості точок. Наближений розв'язок шукається в просторі кубічних сплайнів, що підвищує точність. Значимість наведених математичних викладок має виключно теоретичний характер, а виведені вирази дозволяють провести розрахунки конкретних задач.

Список використаних джерел

1. Григолюк Э. И. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов // Вестник Тамбовского ГТУ. — 2005. — 11, № 2А. — С. 439—448.
2. Григоренко Я. М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я. М. Григоренко, Е. И. Беспалова, А. Б. Китайгородский, А. И. Шинкарь. — К. : Наук. думка, 1986. — 172 с.
3. Григоренко Я. М. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів : навчальний посібник / Я. М. Григоренко, В. Д. Будає, О. Я. Григоренко. — Миколаїв : Іліон, 2010. — 294 с.
4. Григоренко Я. М. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. — К. : Наук. думка, 1981. — 544 с.
5. Григоренко Я. М. Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение (обзор) / Я. М. Григоренко, А. Я. Григоренко // Прикл. Механіка. — 2013. — 49, № 2. — С. 3—70.
6. Carrera E. A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates / E. Carrera, S. Brischetto // Applied Mechanics Reviews. — 2009. — 62, № 1. — P. 1—17.
7. Qatu M. S. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 / M. S. Qatu, R. W. Sullivan, W. Wang // Elsevier Academic Press, Netherlands. — 2010. — 93, № 1. — P. 14—31.
8. Qatu M. S. Vibration of laminated shells and plates. — San Diego, CA: Elsevier, 2004. — 385 p.
9. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis. — CRC Press, 2nd Ed., 2004. — 854 p.
10. Sayyad A. S. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results / A. S. Sayyad, Yu. M. Ghugal // Composite Structures. — 2015. — 129. — P. 177—201.
11. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. — New York: Marcel Dekker, 3rd edition, 2004. — 592 p.
12. Vinson J. R. The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials. — Technomic, Lancaster, PA, 1999. — 545 p.

Valery BUDAK, Oleg PAVLENKO
Mykolaiv

FREE VIBRATION ANALYSIS OF LAMINATED SHALLOW SHELLS USING MINDLIN THEORY BY SPLINE COLLOCATION METHOD

The present study deals with the free vibration of symmetrically laminated doubly curved shallow shells with variable thickness and rectangular platform. The equations of motion of the shell are derived using first order shear deformation theory. Spline function approximation technique, which includes B-splines of the third order, is used to reduce two-dimensional system of coupled differential equations in terms of displacement and rotational functions to one-dimensional. A generalized eigenvalue problem is obtained by applying a point collocation method with suitable boundary conditions. The vector-matrix form of the governing equations with different boundary conditions, from which values of a frequency parameter and the corresponding mode shapes of vibration are obtained, is presented.

Key words: free vibrations, laminated shallow shell, spline collocation method, Mindlin theory.

Валерий БУДАК, Олег ПАВЛЕНКО
г. Николаев

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК В ПОСТАНОВКЕ МИНДЛИНА МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

В статье рассматриваются свободные колебания симметричных слоистых пологих оболочек двоякой кривизны переменной толщины с прямоугольным планом. Уравнения движения оболочки выведены в рамках уточненной теории первого порядка. Полученная двухмерная система дифференциальных уравнений относительно перемещений и углов поворота, сведена к одномерной методом сплайн-аппроксимации с использованием В-сплайнов третьего порядка. Применив метод коллокации, получена задача на собственные значения с соответствующими краевыми условиями. Разрешающая система с разными граничными условиями, из которой можно получить значения собственных частот и соответствующих им форм колебаний, представлена в векторно-матричной форме.

Ключевые слова: свободные колебания, слоистые пологие оболочки, метод сплайн-коллокации, теория Миндлина.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.2016

УДК 004.415.28

Олександра БУЛГАКОВА, Павло КИСЛИЧЕНКО

м. Миколаїв

sashabulgakova@list.ru, pavelkislichenko@gmail.com

АРХІТЕКТУРА КРУПНИХ МАСШТАБОВАНИХ ДОДАТКІВ В КОНТЕКСТІ ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У статті розглянута архітектура крупно-масштабованих додатків в контексті об'єктно-орієнтованого програмування. Наведена методологія декомпозиції у сфері Інтернет-комерції, на спрощеному прикладі проектування модуля персонального кошика.

Для забезпечення високорівневого інтерфейсу для клієнтських класів, та приховування від них низькорівневого інтерфейсу класів підсистеми, запропоновано використовувати найбільш популярні абстрактні архітектурні рішення, які також називаються шаблонами проектування або патернами.

Ключові слова: програмні системи, архітектура, об'єктно-орієнтоване програмування, проектування програмного забезпечення, система, додаток.

Одним з основних питань, яке найчастіше виникає після завершення розробки та запуску програмної системи, як готового продукту, є можливість масштабування. Тобто можливість інтегрування у систему нових модулів, які забезпечать додатковий функціонал, або модифікацію вже існуючих. Неможливість цього зробити без значної зміни інших частин системи – є результатом нестійкої архітектури усього додатку, тобто великої кількості залежностей між класами і формулює основну проблему, яка розглянута у статті.